ORSAY
SÉRIE A,
D'ORDRE
256

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

PAR

Henri NAVELET-NOUALHIER

PREMIÈRE THÈSE

PROPRIETES D'ANALYTICITE DES AMPLITUDES
D'HELICITE A DEUX CORPS

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

MODIFICATION DU FACTEUR DE LANDE D'UN ATOME
EN PRESENCE D'UN CHAMP DE RADIOFREQUENCE

Soutenues le 13 Juin 1967 devant la Commission d'Examen

MM. YVON — Président

MEYER
JACOB
STORA — Examinateurs

Paris

ORSAY
SÉRIE A,
° D'ORDRE
256

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

PAR

Henri NAVELET-NOUALHIER

PREMIÈRE THÈSE

PROPRIETES D'ANALYTICITE DES AMPLITUDES
D'HELICITE A DEUX CORPS

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

MODIFICATION DU FACTEUR DE LANDE D'UN ATOME
EN PRESENCE D'UN CHAMP DE RADIOFREQUENCE

Soutenues le 13 Juin 1967 devant la Commission d'Examen

MM. YVON — Président

MEYER
JACOB
STORA — Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

REMERCIEMENTS

Monsieur le Professeur YVON a accepté de patronner cette thèse et je lui exprime ma profonde gratitude.

Je remercie très vivement le Professeur MEYER qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et accepter de faire partie de ce jury.

L'ambiance stimulante que j'ai trouvée dans le Service de Physique Théorique du C.E.N. Saclay dirigé par Monsieur C.BLOCH a facilité grandement mon initiation à la recherche.

Il me serait difficile de passer sous silence la contribution essentielle de mes camarades G. COHEN-TANNOUDJI et A. MOREL.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur R. STORA qui m'a constamment aidé et encouragé.

Je tiens à remercier Messieurs M. FROISSART, M. JACOB, G. MAHOUX et P. MOUSSA dont les remarques pertinentes m'ont remis souvent dans le bon chemin.

Enfin, ma reconnaissance va au "quadrille" souriant mené par Madame PORNEUF pour la part prise à l'impression rapide de ce document et spécialement à Dany LANGIN sans oublier Francine LEFEVRE, Eliane LEBRUN et Danielle DUBOST.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546604_0076

INTRODUCTION

La compréhension théorique actuelle des interactions fortes repose sur l'exploitation de principes généraux qui ont été déduits de l'étude de modèles plus ou moins imparfaits, comme par exemple, les traitements en perturbation des théories Lagrangiennes[1]. Ces principes se sont affinés et précisés au point d'être erigés en axiomes ; ainsi sont nées les théories dites axiomatiques : théorie axiomatique des champs, théorie axiomatique de la matrice S [1].

Toutes ces théories tiennent compte de l'invariance relativiste sous l'aspect quantique qui a été l'objet du travail fondamental de Wigner et de ses collaborateurs vers les années 40 . En outre les amplitudes de transition entre états à plusieurs particules,considérées comme fonctions des quadri-impulsions des particules entrant en jeu, possèdent des propriétés d'analyticité, qui varient suivant les théories. Ces propriétés d'analyticité sont mal connues à l'heure actuelle : on essaye soit de les déduire de l'étude systématique des amplitudes associées aux diagrammes de Feynman apparaissant dans les théories Lagrangiennes, soit de les démontrer à partir d'axiomes plus généraux, tel par exemple le principe de micro-causalité. En fait on se contente en général de postuler l'analyticité des amplitudes dans des domaines raisonnablement simples et dont la structure ne soit pas en contradiction flagrante avec des principes aussi généraux que l'invariance de Lorentz ou l'unitarité. Ainsi, par exemple, le domaine d'analyticité proposé par Mandelstam dans le cas des réactions à deux corps est le plus grand domaine possible compatible avec l'unitarité de la matrice S . Si les physiciens attachent une telle importance à ces propriétés d'analyticité, c'est que, si abstraites qu'elles puissent paraître, elles se trouvent offrir le seul substitut raisonnable actuellement connu à la notion de potentiel qui gouverne la description des interactions à basse énergie.

Il est facile de comprendre, que, du fait des difficultés techniques surgissant lorsque les réactions mettent en jeu un nombre arbitraire de particules, les processus à deux corps aient fait l'objet des études théoriques les plus approfondies. Or il se trouve qu'expérimentalement de nombreuses réactions qui produisent d'assez nombreuses particules dans l'état final, peuvent néanmoins être interprétées comme des processus à deux corps : on partage l'ensemble des particules produites en deux groupes résultant chacun de la désintégration de systèmes plus ou moins stables.

L'inclusion d'objets doués de spin dans les schémas théoriques actuels est souvent, avec une pointe d'humour, réputée introduire des difficultés inessentielles. Cependant, il ne faut pas oublier, par exemple, que certaines théories Lagrangiennes pour des particules à spin ne sont pas renormalisables, ce qui provoque une difficulté qui pourrait être liée au comportement asymptotique des amplitudes à haute énergie. D'autre part, il suffit de se référer à l'interprétation de ces comportements asymptotiques, donnée à la suite de Regge en termes d'échange de familles de particules à spin, pour se convaincre que ces difficultés ne sont pas nécessairement triviales.

Certaines de ces complications se manifestent de la façon suivante : alors que la dynamique d'une réaction entre particules sans spin est spécifiée par une fonction $F(s,t)$ des invariants de Lorentz, carré de l'énergie totale dans le système du centre de masse, et carré du moment de transfert entre une particule initiale et une particule finale, il faut se donner pour décrire une réaction entre particules à spin :

1°) une amplitude "spinorielle" $M_{A_1 \ldots A_4}(p_1 \ldots p_4)$ où p_i est la quadri-impulsion de la particule (i) et A_i un indice prenant $2s_i + 1$ valeurs, s_i étant le spin de la particule i ,

2°) des spineurs décrivant les polarisations des particules initiales et finales (par exemple spineur de Dirac pour une particule de spin 1/2, quadri-vecteur polarisation pour une particule de spin 1). L'amplitude de transition est alors obtenue en contractant l'amplitude spinorielle avec les spineurs qui décrivent la polarisation.

L'exploitation de l'invariance relativiste consiste à trouver une famille de polynômes spinoriels $P^I_{A_1 \ldots A_4}(p_1 \ldots p_4)$ de telle sorte que l'amplitude spinorielle puisse s'écrire :

$$M_{A_1 \ldots A_4}(p_1 \ldots p_4) = \sum_I A_I(s,t)\, P^I_{A_1 \ldots A_4}(p_1 \ldots p_4) ,$$

et ce, de façon que les amplitudes invariantes $A_I(s,t)$ jouissent des mêmes propriétés d'analyticité que la fonction $F(s,t)$ définie dans le cas d'une réaction entre particules sans spin.

Ce problème délicat a été résolu par K. Hepp [4] ; la solution n'est pas unique. Celle qui nous a paru la plus commode a été donnée par D.N. Williams qui a utilisé les travaux de H. Joos sur l'invariance relativiste. Cette solution souffre cependant d'un certain nombre d'imperfections :

1°) les $A_I(s,t)$ ne correspondent pas de façon naturelle à des processus où les particules initiales et finales ont des polarisations bien déterminées.

2°) Sur un plan plus technique leur définition se prête mal à l'exploitation de propriétés de symétrie discrètes telles que l'invariance par parité, renversement du temps, d'une part, et à l'expression de la propriété de croisement d'autre part, qui permet de relier entre elles des réactions du type $1+2 \to 3+4$ et $\bar{4}+2 \to 3+\bar{1}$ où $\bar{4},\bar{1}$ dénotent les anti-particules associées à $4,1$ respectivement.

Pour ces raisons, il serait attrayant de définir des amplitudes invariantes à la fois plus directement liées aux phénomènes physiques et plus maniables, mais possédant les mêmes propriétés d'analyticité que les $A_I(s,t)$.

Il se trouve que les amplitudes d'hélicité introduites par Jacob et Wick sont près de satisfaire à ces critères et que, de plus, l'utilisation de ces amplitudes semble être particulièrement bien adaptée à l'étude des phénomènes de hautes énergies. C'est pour elles en particulier qu'il semble commode de conjecturer les comportements à la Regge, qui fournissent à l'heure actuelle la trame des études phénoménologiques des interactions fortes à haute énergie[21].

Les amplitudes d'hélicité se trouvent cependant avoir un défaut majeur. Alors que les singularités des amplitudes invariantes précédemment mentionnées proviennent de propriétés dynamiques (dues essentiellement à l'unitarité), les amplitudes d'hélicité possèdent en outre des singularités d'origine toute différente que nous appellerons singularités cinématiques.

La nécessité d'étudier en détail ces singularités cinématiques nous est apparue au cours d'un travail précédent sur l'analyse phénoménologique des réactions à deux corps à haute énergie[21], dont une partie seulement a pu être menée à bien, dans des cas particuliers, en l'absence des résultats de l'étude générale que nous présentons ici.

Un certain nombre d'auteurs[6][7][8] s'étaient attaqués avant nous aux problèmes résolus ici, mais ils ne disposaient pas à l'époque où leurs travaux ont été écrits des techniques qui nous ont permis de mener à bien ce travail, de sorte que leurs résultats se trouvent être soit imprécis, soit même incorrects.

Notre travail comporte trois étapes.

Dans le chapitre II nous cherchons les singularités cinématiques des amplitudes d'hélicité. Le point de départ est le travail de D.N. Williams[2] qui a montré que le développement de Joos[3] des amplitudes spinorielles, relatif au système au repos d'une des particules massives mises en jeu, conduisait sous des hypothèses assez générales à des amplitudes invariantes sans singularités cinématiques. Ceci signifie que les amplitudes invariantes sont des fonctions analytiques des invariants s et t dans un domaine qui est l'image du domaine d'analyticité des amplitudes spinorielles dans l'espace des quadri-impulsions sur leurs couches de masse.

La méthode utilisée ici consiste à écrire les amplitudes d'hélicité comme combinaisons linéaires des amplitudes invariantes de Joos. Les singularités cinématiques sont alors celles des coefficients de ce développement, et leur élimination conduit à la définition des amplitudes d'hélicité "régularisées". L'appendice A.I traite les cas particuliers d'égalité de certaines masses pour lesquels la méthode générale ne s'applique pas.

Dans le chapitre III, nous montrons que le chemin de prolongement utilisé par J. Bros, H.Epstein et V. Glaser[5b] pour croiser les amplitudes spinorielles, est utilisable pour effectuer le croisement entre amplitudes d'hélicité. La matrice de croisement est ensuite explicitement écrite. En

raison de son caractère technique, la détermination d'un signe apparaissant dans la formule de croisement est rejetée en appendice (A.II).

Dans l'appendice A.III , nous vérifions que la matrice de croisement entre les amplitudes d'hélicité "régularisées" construites au chapitre précédent est uniforme. La vérification de la cohérence entre le croisement et la régularisation est possible parce que, à l'opposé de la méthode employée par certains auteurs[7][8] pour débarasser les amplitudes d'hélicité de leurs singularités cinématiques, celle que nous employons est indépendante du croisement.

Enfin, dans le chapitre IV, nous montrons comment l'existence de pôles dans les éléments de la matrice de croisement entre les amplitudes d'hélicité "régularisées" implique des relations entre les amplitudes d'hélicité pour certaines valeurs de la variable d'énergie. Ces relations, appelées contraintes cinématiques, constituent une généralisation de celles qui avaient été déjà obtenues par d'autres méthodes dans certains cas particuliers[16][17]. L'criture générale de ces contraintes est fondée sur l'introduction des amplitudes de transversité, (définies par A. Kotański[9]), dont la propriété essentielle est de diagonaliser la matrice de croisement.

Tous les résultats obtenus ont été mis à l'épreuve sur des exemples où les relations entre amplitudes invariantes et amplitudes d'hélicité sont connues, si bien que les singularités cinématiques, la matrice de croisement et les contraintes cinématiques peuvent être trouvées directement. Les calculs correspondants sont indiqués dans l'appendice A.V.

Dans la conclusion, (chapitre V) , nous donnons un résumé des résultats obtenus au cours de ce travail, ainsi que des exemples d'applications à des modèles phénoménologiques ou en vue de développements nouveaux sur le domaine d'analyticité des amplitudes. Nous mentionnons enfin quelques questions encore non résolues qui pourraient aboutir à d'intéressants prolongements de cette étude.

II - SINGULARITES CINEMATIQUES DES AMPLITUDES D'HELICITE A DEUX CORPS

1) Notations et conventions

A - Transformations de Lorentz et matrices de SL(2,C)

Nous rappelons brièvement la correspondance entre les transformations de Lorentz et le groupe $SL(2,C)$ des matrices unimodulaires 2×2 à éléments complexes.

Soit p un quadrivecteur de l'espace-temps muni de la métrique $(1,-1,-1,-1)$*. Nous lui associons la matrice 2×2 construite à l'aide des matrices de Pauli $\{\vec{\sigma}\}$, $p\sigma = p_o 1 - \vec{p}.\vec{\sigma}$, de déterminant $p^2 = p_o^2 - \vec{p}^2$. Deux matrices unimodulaires quelconques, A et B, permettent de définir un nouveau quadrivecteur p' par la relation :

$$p'\sigma = A\, p\sigma\, B^T \quad . \tag{II.1}$$

On déduit de la relation (II.1) que le carré de Minkowski de p est conservé. En effet : $\det p'.\sigma = \det p.\sigma$, c'est-à-dire que $p'^2 = p^2$, si bien que le couple (A,B) est associé à une transformation de Lorentz $\Lambda(A,B)$ telle que $p' = \Lambda(A,B)\, p$. La réciproque s'énonce comme suit : à toute transformation de Lorentz Λ on peut associer deux couples de matrices 2×2 unimodulaires (A,B) et $(-A,-B)$ par la relation : $\Lambda p.\sigma = A\, p.\sigma\, B^T$.

Remarques : a) Si $B^T = A^\dagger$, alors la transformation de Lorentz associée est réelle.

b) Si $B^T = A^{-1}$, alors la transformation de Lorentz associée est une rotation en général complexe. Si de plus $A^{-1} = A^\dagger$ cette rotation est réelle.

---

* Dans tout ce qui suit, les questions de "norme" et d'"orthogonalité" seront relatives à cette métrique.

c) Toute matrice 2×2 unimodulaire A est équivalente à son inverse transposée : $A^{T-1} = \varepsilon^{-1} A \varepsilon$, où $\varepsilon = i\sigma_2$. Plus généralement, pour toute matrice M 2×2 , on a $\varepsilon^{-1} M \varepsilon M^T = \det M \, 1$, d'où en particulier $\varepsilon^{-1} \vec{\sigma} \varepsilon = - \vec{\sigma}^T$.

d) Soit $p.\tilde{\sigma}$ la matrice 2×2 $p.\tilde{\sigma} = p_o 1 + \vec{p}.\vec{\sigma}$. De la relation (II.1) et de la remarque précédente, on déduit : $p'.\tilde{\sigma} = (B^T)^{-1} \, p.\tilde{\sigma} \, A^{-1}$.

A toute matrice 2×2 non singulière M , nous associons la matrice $D^s(M)$ définie par[3] :

$$D^s(M)^{\lambda}_{\mu} = (\det M)^{s-\mu} \sqrt{\frac{(s+\mu)!(s-\mu)!}{(s+\lambda)!(s-\lambda)!}} \, (M^1{}_2)^{\mu-\lambda} \, (M^1{}_1)^{\mu+\lambda} \, P_{s-\mu}^{(\mu-\lambda),(\mu+\lambda)}(Z) \qquad \text{(II.2)}$$

où : $Z = \dfrac{M^1{}_1 M^2{}_2 + M^2{}_1 M^1{}_2}{\det M}$ et $P_n^{a,b}(Z)$ est la fonction de Jacobi de première espèce[10]. (λ est l'indice de ligne et μ celui de la colonne). Si la matrice 2×2 M est unimodulaire, $D^s(M)$ est une représentation finie de dimension $2s+1$ du groupe $SL(2,C)$. De toute façon $D^s(M)^{\lambda}_{\mu}$ est un polynome dans les éléments de M qui définit une représentation de $GL(2,C)$.

B - Amplitudes spinorielles

Nous allons rappeler comment, à chaque représentation finie de $SL(2,C$ a savoir : (s,o) , qui à A fait correspondre $D^s(A)$

(o,s) , qui à A fait correspondre $D^s(A^{\dagger-1})$

$(s,o)^* \simeq (o,s)$, qui à A fait correspondre $D^s(A^*) = D^s(\varepsilon) \, D^s(A^{\dagger-1}) \, D^s(\varepsilon^{-1})$

$(o,s)^* \simeq (s,o)$, qui à A fait correspondre $D^s(A^{T-1}) = D^s(\varepsilon) \, D^s(A) \, D^s(\varepsilon^{-1})$

on peut associer une description des états à une particule de masse m et de

spin s. Nous allons maintenant construire explicitement les états correspondants qui sont communément appelés états spinoriels[3].

Soit $(\overset{o}{t}, \overset{o}{n}_1, \overset{o}{n}_2, \overset{o}{n}_3)$ la tétrade de référence, c'est-à-dire l'ensemble des quatre quadrivecteurs de base, orthonormés, qui spécifient le référentiel du "laboratoire" dont l'orientation canonique est fixée par la condition $\det(\overset{o}{t}\ \overset{o}{n}_1\ \overset{o}{n}_2\ \overset{o}{n}_3) = +1$. Pour une particule au repos de spin s et de masse m, nous définissons les états $|s,\lambda\rangle$ qui se transforment par une rotation (R,R^{-1}) suivant la loi :

$$U(R)\ |s,\lambda\rangle = D^s(R)^{\lambda'}{}_{\lambda}\ |s,\lambda'\rangle \quad ,$$

où λ est une valeur propre quelconque de l'opérateur $-\frac{1}{m} W(p).\overset{o}{n}_3$. ($W$ est le quadrivecteur polarisation défini à partir des opérateurs infinitésimaux du groupe de Poincaré par[11] : $W_\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma$). Soit maintenant $L(p)$ * la transformation de Lorentz qui fait passer de la tétrade de référence à une tétrade orthonormée, canoniquement orientée $(\frac{p}{m}, n_1(p), n_2(p), n_3(p))$ liée à p, p désignant la quadri-impulsion de la particule. L'état dans lequel la particule a la quadri-impulsion p se définit, à partir de l'état où la particule est au repos, par la relation :

$$|p,L(p),s,\lambda\rangle = U(L(p))|s,\lambda\rangle \quad .$$

Il est aisé de vérifier que pour toute transformation de Lorentz Λ cet état se transforme suivant la loi :

$$U(\Lambda)|p,L(p),s,\lambda\rangle = D^s(L^{-1}(\Lambda p)\ \Lambda L(p))^{\lambda'}{}_{\lambda}\ |\Lambda p,L(\Lambda p),s,\lambda'\rangle \quad ,$$

où $L^{-1}(\Lambda p)\ \Lambda L(p)$ est la rotation de Wigner[12].

---

* Nous utiliserons désormais l'expression "Transformation de Lorentz L^u pour désigner la matrice unimodulaire L. La notation $v' = Lv$ où v est un quadrivecteur et L une matrice 2×2 est une notation abrégée pour :

$$v'^{\mu} = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\,[\sigma^\mu L\, v.\sigma\, L^\dagger]$$

Si $L'(p)$ est une transformation de Lorentz qui définit une autre tétrade liée à p , $(\frac{p}{m}, n'_1(p), n'_2(p), n'_3(p))$, et un autre état $|p,L'(p),s$ on a la relation :

$$|p,L'(p),s,\lambda\rangle = D^s(L^{-1}(p)L'(p))^{\lambda'}{}_{\lambda} \; |p,L(p),s,\lambda'\rangle \quad .$$

Ainsi, l'état $|p,s,A\rangle = D^s(L^{-1}(p))^{\lambda}{}_{A} \; |p,L(p),s,\lambda\rangle$ est indépendant de la transformation de Lorentz $L(p)$. De plus sa loi de transformation est simple :

pour toute transformation de Lorentz Λ , on obtient :

$$U(\Lambda)|p,s,A\rangle = D^s(\Lambda)^{A'}{}_{A} \; |\Lambda p,s,A'\rangle \quad ,$$

c'est donc un des états spinoriels cherchés. Les trois autres s'obtiennent d'une manière analogue :

$$|\widetilde{p,s,\dot{A}}\rangle = D^s(L^{\dagger}(p))^{\lambda}{}_{A} \; |p,L(p),s,\lambda\rangle$$

$$|p,s,\dot{A}\rangle = D^s(L^{\dagger}(p)\,\varepsilon^{-1})^{\lambda}{}_{A} \; |p,L(p),s,\lambda\rangle$$

$$|\widetilde{p,s,A}\rangle = D^s(L^{-1}(p)\,\varepsilon)^{\lambda}{}_{A} \; |p,L(p),s,\lambda\rangle \quad .$$

Pour toute transformation de Lorentz Λ , on obtient :

$$U(\Lambda)|\widetilde{p,s,\dot{A}}\rangle = D^s(\Lambda^{\dagger -1})^{A'}{}_{A} \; |\widetilde{\Lambda p,s,\dot{A}}\rangle$$

$$U(\Lambda)|p,s,\dot{A}\rangle = D^s(\Lambda^{*})^{A'}{}_{A} \; |\Lambda p,s,\dot{A}'\rangle$$

$$U(\Lambda)|p,s,A\rangle = D^s(\Lambda^{T-1})^{A'}{}_{A} \; |\widetilde{\Lambda p,s,A'}\rangle \quad .$$

Les bras conjugués de ces kets sont définis à partir des produits scalaires suivants :

$$\langle p,s,A|p',s',A'\rangle = \frac{\omega(p)}{m}\ \delta_3(\vec{p}-\vec{p}')\ \delta_{ss'}\ D^s\left(\frac{\tilde{p\sigma}}{m}\right)^A{}_{A'}$$

$$\langle \widetilde{p,s,\dot{A}}|p',s',A'\rangle = \frac{\omega(p)}{m}\ \delta_3(\vec{p}-\vec{p}')\ \delta_{ss'}\ \delta^A{}_{A'}\ ,$$

ces bras se transforment à l'aide des matrices complexes conjuguées, de sorte que l'opérateur $U(\Lambda)$ soit bien unitaire.

Considérons maintenant une réaction à deux corps $1 + 2 \to 3 + 4$ où la particule i à la quadri-impulsion p_i et le spin s_i $(p_1 + p_2 = p_3 + p_4)$. Par définition nous appelons amplitude spinorielle la quantité suivante :

$$M_{A_3\ A_4;A_1\ A_2}(p_3\ p_4;\ p_1\ p_2) = \langle p_3\ s_3\ \dot{A}_3;p_4\ s_4\ \dot{A}_4|\tau|p_1\ s_1\ A_1;p_2\ s_2\ A_2\rangle\ ,$$

où τ est définie à partir de la matrice de transition $T = \frac{S-1}{i}$ par $\langle\ |T|\ \rangle = (2\pi)^4\delta(\quad)\langle\ |\tau|\ \rangle$. Sur cette forme, l'invariance de la matrice S par le groupe de Lorentz se traduit simplement par la formule de covariance :

$$M_{A_3\ A_4;A_1\ A_2}(p_3\ p_4;p_1\ p_2) = D^{s_1}(\Lambda)^{A_1'}{}_{A_1} D^{s_2}(\Lambda)^{A_2'}{}_{A_2} D^{s_3}(\Lambda)^{A_3'}{}_{A_3} D^{s_4}(\Lambda)^{A_4'}{}_{A_4} \times$$

$$\times\ M_{A_3'\ A_4';\ A_1'\ A_2'}(\Lambda p_3\ \Lambda p_4\ ;\ \Lambda p_1\ \Lambda p_2) \qquad \text{(II.3)}$$

quelle que soit la transformation de Lorentz Λ .

L'intérêt de ces amplitudes spinorielles provient du fait qu'on pe faire sur elles des hypothèses d'analyticité. Dans la théorie axiomatique des champs, elles apparaissent comme des transformées de Fourier de valeurs moyen nes dans le vide de produits, chronologiquement ordonnés, d'opérateurs de champ. La formule de covariance (II.3) permet d'utiliser le travail de Joos[3] pour développer les amplitudes spinorielles en fonction de polynômes covarian attachés au système au repos d'une des particules massives mises en jeu. D.N. Williams[2] a prouvé alors que les coefficients de ce développement n'avaient pas de singularités cinématiques :

ce développement s'écrit :

$$M_{A_3A_4;A_1A_2}(p_3p_4\ ;\ p_1p_2) = \sum_{\substack{J,M_1,M_2 \\ \ell_1+\ell_2=\{^{J}_{J+1}}} (J,\mathcal{J},s_1\ s_2\ s_3\ s_4)^{A}_{A_1A_2A_3A_4}\ a_{\ell_1\ \ell_2}(s,t,u \qquad \text{(II}$$

$$\times\ (J,\ell_1\ \ell_2)_{A}^{M_1\ M_2}\ Y^{\ell_1}_{M_1}(\overrightarrow{e(p_1,p_3)})\ Y^{\ell_2}_{M_2}(\overrightarrow{e(p_2,p_3)}),$$

où $(J\ \ell_1\ \ell_2)_{A}^{M_1\ M_2}$ est un coefficient de Clebsch-Gordan couplant J à ℓ_1 et ℓ_2, $(J,\mathcal{J},s_1s_2,s_3s_4)^{A}_{A_1\ A_2\ A_3\ A_4}$ est le coefficient de couplage de s_1, s_2, s_3, s_4 pour donner J. $\mathcal{J}$ définit le mode de couplage. $Y^{\ell}_{M}(\vec{e})$ est la fonction harmonique sphérique solide d'ordre ℓ :

$$Y^{\ell}_{M}(\vec{e}) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell+|M|)!(\ell-|M|)!}{4\pi}}\ (e_\varepsilon)^{|M|}\ (\sqrt{\vec{e}^{\,2}})^{\ell-|M|}\ P^{|M|,|M|}_{\ell-|M|}(\hat{e}_3)$$

$$\left(e_\varepsilon = -\varepsilon\,\frac{e_1+i\varepsilon\,e_2}{2}\ ;\ \varepsilon = \text{signe de } M\ ;\ \hat{e}_3 = \frac{e_3}{\sqrt{\vec{e}^{\,2}}}\right),$$

$\overrightarrow{e(p_i,p_j)}$ est le semi-bivecteur associé au produit extérieur de p_i et p_j :

$$\overrightarrow{e(p_i,p_j)} = \frac{1}{2}\left[p_i^o \vec{p}_j - p_j^o \vec{p}_i - i\,(\vec{p}_i \times \vec{p}_j) \right]$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 \quad , \quad t = (p_1 - p_3)^2$$

$a_{\ell_1\ \ell_2}(s,t)$ sont les amplitudes invariantes de Joos.

C - Etats et amplitudes d'hélicité[13]

a) Etat à une particule : hélicité dans le référentiel du laboratoire.

La définition d'un état d'hélicité dans le référentiel du laboratoire correspond à un choix particulier de la transformation de Lorentz L(p) : le quadrivecteur $n_3(p)$ est choisi dans le biplan défini par $\overset{o}{t}$ et p .

b) Etat à deux particules : hélicité dans le système du centre de masse.

On choisit les quadrivecteurs $n_3(p_1)$ et $n_3(p_2)$ dans le biplan défini par p_1 et p_2 :

$$n_3(p_i) = h_{12}(i) = - \frac{m_i^2\, P - (p_i.P)\, p_i}{m_i \sqrt{(p_i.P)^2 - m_i^2\, P^2}}$$

où $P = p_1 + p_2$. Le quadrivecteur hélicité $h_{12}(i)$ ($h_{12}{}^2(i) = -1$) est entièrement défini par la condition suivante : dans le système du centre de masse, $\overrightarrow{h_{12}(i)}.\vec{p}_i$ est positif.

c) Amplitudes d'hélicité pour les réactions à deux corps.

Pour définir complètement la tétrade d'hélicité dans le système du centre de masse, nous devons lever l'arbitraire sur l'axe $n_2(p_i)$. Dans le cas d'une réaction à deux corps, le quadrivecteur w de composantes w_μ données par par :

$$w_\mu = - \frac{2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_1^{\ \nu} p_2^{\ \rho} p_3^{\ \sigma}}{\sqrt{\Phi(s,t)}} \qquad (w_\mu . w^\mu = -1) \ ,$$

est orthogonal aux huit quadrivecteurs p_i et $h_{12}(i)$ $(i = 1...4)$. Nous le choisirons désormais comme axe 2 de chaque tétrade :

$$n_2(p_i) = w \qquad i = 1,...4 \ . \qquad *$$

La définition de l'amplitude d'hélicité à deux corps s'en déduit :

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(s,t) = \langle p_3,L_{12}(3),s_3,\lambda_3;p_4,L_{12}(4),s_4,\lambda_4|\mathcal{T}|p_1,L_{12}(1),s_1,\lambda_1;p_2,L_{12}(2),s_2$$

où $L_{12}(i)$ est la transformation de Lorentz définie, à cause de la condition d'orientation canonique, par son action sur trois des quadrivecteurs de base :

$$L_{12}(i) \begin{Vmatrix} o \\ t \\ o \\ n_2 \\ o \\ n_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{p_i}{m_i} \\ w \\ h_{12}(i) \end{Vmatrix}$$

---

* $\Phi(s,t) = 0$ est l'équation de la limite de la région physique. Le signe - permet d'assurer que dans le système du centre de masse, $\vec{w} = \frac{\vec{p}_1 \times \vec{p}_3}{\sqrt{\Phi(s,t)}}$ ($\varepsilon_{0123} = +$ si on choisit la détermination positive de la fonction $\sqrt{\Phi(s,t)}$

Remarque : La transformation de Lorentz $L_{12}(i)$ fait passer du quadrivecteur $\overset{o}{n}_1$ au quadrivecteur $n_1(p)$ de composantes $(n_1(p_i))_\mu$:

$$(n_1(p_i))_\mu = (L_{12}(i)\,\overset{o}{n}_1)_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\left(\frac{p_i}{m_i}\right)^\nu w^\rho\, h^\sigma_{12}(i) \quad .$$

P. Moussa et R.Stora[14] ont montré qu'il est commode d'écrire ces transformations de Lorentz de la manière suivante :

$$L_{12}(i) = B\left(\frac{P}{\sqrt{s}} \to \frac{p_i}{m_i}\right)\ \Omega_{12}\,(n_3(P) \to q_{ij})\ [P]\ \varepsilon' \quad , \qquad \text{(II.5)}$$

où : i) $B(p \to q)$ est la transformation de Lorentz pure qui fait passer du quadrivecteur p au quadrivecteur q .

ii) $[P]$ est une transformation de Lorentz arbitraire qui fait passer du quadrivecteur $\overset{o}{t}$ au quadrivecteur $P = p_1 + p_2$.

iii) ε' est une rotation de $+\pi$ autour de l'axe $\overset{o}{n}_2$ pour les particules 2 et 4 et l'identité pour les particules 1 et 3 .

iv) Enfin $\Omega_{12}(n_3(P) \to q_{ij})$ est la transformation de Lorentz de trace positive définie comme suit :

- Elle laisse P invariant
- Elle fait passer du quadrivecteur $n_2(P) = [P]\,\overset{o}{n}_2$ au quadrivecteur w
- Enfin elle fait passer du quadrivecteur $n_3(P) = [P]\,\overset{o}{n}_3$ au quadrivecteur :

$$q_{ij} = \frac{p_i - p_j - [P.(p_i - p_j)]\,\frac{P}{P^2}}{\sqrt{\frac{[P.(p_i - p_j)]^2}{P^2} - (p_i - p_j)^2}}$$

(Les indices i,j réfèrent au couple de particules de l'état initial ou final) .

Nous avons maintenant tous les éléments pour exprimer les amplitudes d'hélicité en fonction des amplitudes spinorielles.

En remarquant que : $|p,L(p),s,\lambda\rangle = D^{s}(L(p))^{A}{}_{\lambda}\ |p,s,A\rangle$

et $\langle p,L(p),s,\lambda| = D^{s}(L(p)\varepsilon)^{A}{}_{\lambda}\ \langle p,s,\dot{A}|$

on obtient :

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(s,t) = D^{s_1}(L_{12}(1))^{A_1}{}_{\lambda_1}\ D^{s_2}(L_{12}(2))^{A_2}{}_{\lambda_2}\ D^{s_3}(L_{12}(3)\varepsilon)^{A_3}{}_{\lambda_3}\ D^{s_4}(L_{12}(4)\varepsilon)^{A_4}{}_{\lambda_4}$$

$$\times\ M_{A_3A_4;A_1A_2}(p_3p_4;p_1p_2) \qquad \text{(II.6)}$$

Remarque : Notre convention diffère de celle de Jacob-Wick[13] par l'omission de la phase $(-1)^{s-\lambda}$ pour les particules 2 et 4 . En conséquence, la conservation de la parité s'écrit :

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(s,t) = \eta(-1)^{\sum_i (s_i+\lambda_i)}\ M_{-\lambda_3-\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}(s,t) \quad , \qquad \text{(II.7)}$$

où $\eta = \eta_1\eta_2\ \eta_3\eta_4$ est le produit des quatre parités intrinsèques .

D - Cinématique des réactions à deux corps

Nous définissons maintenant des quantités qui seront utilisées constamment par la suite dans le cas d'une réaction à deux corps quelconque schématisée par la figure II_1 .

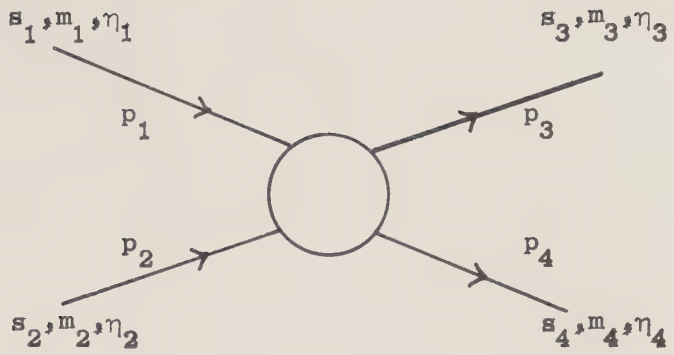

Figure II_1

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2$$

$$s + t + u = \sum_i m_i^2$$

$$S_{ij} = \sqrt{(s-(m_i + m_j)^2)(s-(m_i - m_j)^2)}$$

$$\varphi_{ij} = \sqrt{s-(m_i + m_j)^2} \quad \text{seuil "i,j"}$$

$$\Psi_{ij} = \sqrt{s-(m_i - m_j)^2} \quad \text{pseudoseuil "i,j"} \ .$$

$$\Phi(s,t) = st\Big(\sum_i m_i^2 - t - s\Big) - t(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2) - s(m_2^2 - m_4^2)(m_1^2 - m_3^2) - (m_1^2 + m_4^2 - m_2^2 - m_3^2)$$

$$\times \quad (m_1^2\, m_4^2 - m_2^2\, m_3^2) \ ,$$

$\Phi(s,t) = 0$ est l'équation de la limite de la région physique . A l'intérieur de la région physique, $\Phi(s,t)$ est positive :

$$\omega_i = \frac{s+m_i^2-m_j^2}{2\sqrt{s}}$$ énergie de la particule i

$$p_{ij} = \frac{S_{ij}}{2\sqrt{s}}$$ moment de la particule i dans le système du centre de masse de i et d

$$p_{12} = p_{21} = k \qquad ; \qquad p_{34} = p_{43} = p$$

$$\cos\theta_s = \frac{2st + s^2 - s\sum_i m_i^2 + (m_1^2-m_2^2)(m_3^2-m_4^2)}{S_{12}\ S_{34}}$$

$$\sin\theta_s = \frac{2\sqrt{s}\ \sqrt{\Phi(s,t)}}{S_{12}\ S_{34}}$$ $(0 \leq \theta_s \leq \pi$ dans la région physique de la voie s) .

2) Principe de la méthode

A - Définition d'une singularité cinématique

Nous dirons qu'une amplitude n'a pas de singularités cinématiques si elle a les mêmes propriétés d'analyticité, en les variables s et t, que les amplitudes invariantes de Joos $a_{\ell_1 \ell_2}(s,t)$ (voir section I. § B) . A l'aide du développement II.5 , on peut écrire les amplitudes d'hélicité comme combinaison linéaire des amplitudes de Joos, les coefficients étant des fonctions de s et de t :

$$M_{\{\lambda\}}(s,t) = \sum_{(\ell_1,\ell_2)} C_{\{\lambda\}}^{\ell_1,\ell_2}(s,t)\ a_{\ell_1\ell_2}(s,t) \quad . \qquad \text{(II.8)}$$

Les singularités cinématiques seront donc celles des coefficients $C_{\{\lambda\}}^{\ell_1,\ell_2}(s,t)$.

Nous allons préciser maintenant cette notion. Supposons par exemple que les coefficients $C^{\ell_1,\ell_2}_{\{\lambda\}}(s,t)$ aient une singularité du type racine carrée à $s = s_o$ et que les amplitudes $a_{\ell_1\ell_2}(s,t)$ aient une singularité dynamique du même type à $s = s_o$ (s_o est un seuil par exemple). Soit :

$$M_{\{\lambda\}}(\pm\sqrt{s-s_o}) = \sum_{(\ell_1,\ell_2)} C^{\ell_1\ell_2}_{\{\lambda\}}(\pm\sqrt{s-s_o})\, a_{\ell_1\ell_2}(\pm\sqrt{s-s_o})$$

les deux déterminations de l'amplitude d'hélicité $M_{\{\lambda\}}$ correspondant aux deux déterminations de la fonction $\sqrt{s-s_o}$. S'il se trouve que les deux quantités

$$\sum_{(\ell_1,\ell_2)} C_{\{\lambda\}}(\mp\sqrt{s-s_o})\, a_{\ell_1\ell_2}(\pm\sqrt{s-s_o})$$

correspondent aux deux déterminations d'une autre amplitude d'hélicité $M_{\{\lambda'\}}$, la fonction $F_{\{\lambda\}} = M_{\{\lambda\}} + M_{\{\lambda'\}}$ n'aura pas de singularité cinématique à $s = s_o$. En effet, calculons la discontinuité

$$\Delta F_{\{\lambda\}} = F_{\{\lambda\}}(+\sqrt{s-s_o}) - F_{\{\lambda\}}(-\sqrt{s-s_o}) \quad ,$$

on trouve :

$$\Delta F_{\{\lambda\}} = \sum_{(\ell_1,\ell_2)} \left\{ C^{\ell_1\ell_2}_{\{\lambda\}}(+\sqrt{s-s_o}) + C^{\ell_1\ell_2}_{\{\lambda\}}(-\sqrt{s-s_o}) \right\} \times \left\{ a_{\ell_1\ell_2}(+\sqrt{s-s_o}) - a_{\ell_1\ell_2}(-\sqrt{s-s_o}) \right\} \quad ,$$

c'est-à-dire qu'à $s=s_o$, la discontinuité $\Delta F_{\{\lambda\}}$ est une combinaison linéaire à coefficients uniformes des discontinuités dynamiques $(\Delta a_{\ell_1\ell_2})$.

Un développement du type (II.8) s'obtient facilement à l'aide de l'expression (II.6) des amplitudes d'hélicité en fonction des amplitudes spinorielles, et du développement de ces amplitudes spinorielles en fonction des amplitudes invariantes (II.4), au moyen de l'expression (II.3) de la covariance.

Pour toute transformation de Lorentz Λ on obtient :

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(s,t) = D^{s_1}(\Lambda L_{12}(1))^{A_1}{}_{\lambda_1}\, D^{s_2}(\Lambda L_{12}(2))^{A_2}{}_{\lambda_2}\, D^{s_3}(\Lambda L_{12}(3)\varepsilon)^{A_3}{}_{\lambda_3}\, D^{s_4}(\Lambda L_{12}(4)\varepsilon)^{A_4}{}_{\lambda}$$

$$\times\ M_{A_3A_4;A_1A_2}(\Lambda p_3, \Lambda p_4; \Lambda p_1, \Lambda p_2) \quad , \qquad \text{(II.9)}$$

où l'amplitude spinorielle $M_{\{A_i\}}$ se développe suivant la formule II.4 . Notre choix de Λ dépendra de la singularité à étudier.

Avant d'entreprendre des calculs il est important de déceler quelles sont les singularités qui vont intervenir dans le problème. Etant donné une singularité quelconque en s ou t , il est toujours possible de trouver une transformation de Lorentz Λ , telle que cette singularité n'apparaisse pas dans le développement de l'amplitude $M_{A_3A_4;A_1A_2}(\Lambda p_3, \Lambda p_4; \Lambda p_1, \Lambda p_2)$. Les seules singularités inévitables sont donc celles des matrices $D^s(\Lambda L_{12}(i))$. Or une transformation de Lorentz, amenant la tétrade de référence sur une certaine tétrade $\{n_i\}$, est singulière en même temps que les quadrivecteurs n_i de cette tétrade. Il faut donc chercher les singularités cinématiques au moins parmi celles des quadrivecteurs des tétrades d'hélicité ; c'est-à-dire $\Phi(s,t) =$ à cause de la définition du quadrivecteur w et $S_{12} = 0$ ou $S_{34} = 0$ à cause de la définition du quadrivecteur d'hélicité $h_{12}(i)$ $(\sqrt{(p_i.P)^2 - m_i^2 P^2} = S_{ij})$.

De plus si on change de détermination pour la fonction S_{12} (ou S_{34}) les deux quadrivecteurs d'hélicité initiaux (ou finaux) vont changer de signe. Ceci suggère d'associer l'amplitude d'hélicité $M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ à l'amplitude d'hélicité $M_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}$ (ou $M_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$) . Par contre lorsqu'on change la détermination de la fonction $\sqrt{\Phi}$ l'axe 2 de chaque tétrade va changer de signe. A une phase près l'amplitude va rester la même. Ceci suggère que la singularité $\sqrt{\Phi}$ se factorise dans chaque amplitude d'hélicité.

B - Choix explicites des transformations Λ

Soit R un référentiel, Λ^{-1} la transformation de Lorentz qui fait passer du référentiel du laboratoire au référentiel R . On remarque alors que les composantes du quadrivecteur Λp dans le référentiel du laboratoire sont égales à celles du quadrivecteur p dans le référentiel R . En effet

$$\Lambda p \overset{\circ}{n}_i = \Lambda p \cdot \Lambda n_i^R = p \cdot n_i^R$$

si l'ensemble des quatre quadrivecteurs n_i^R définit le repère R . Les référentiels R que nous utiliserons par la suite sont ceux où le centre de masse P de la réaction est au repos. Il nous suffit pour cela de choisir

$$\Lambda^{-1} = [P] \quad .$$

Evaluons par exemple la transformation $\Lambda L_{12}(1)$:

$$\Lambda L_{12}(1) = \Lambda\ B\left(\frac{p}{\sqrt{s}} \to \frac{p_1}{m_1}\right)\ \Omega_{12} \begin{Bmatrix} P \to P \\ n_3(P) \to q_{12} \\ n_2(P) \to w \end{Bmatrix} [P]$$

$$= B\left(\frac{\Lambda p}{\sqrt{s}} \to \frac{\Lambda p_1}{m_1}\right) \Lambda\ \Omega_{12} \begin{Bmatrix} P \to P \\ n_3(P) \to q_{12} \\ n_2(P) \to w \end{Bmatrix} [P]$$

$$= B\left(\overset{\circ}{t} \to \frac{\Lambda p_1}{m_1}\right)\ \Omega_{12} \begin{Bmatrix} \overset{\circ}{t} \to \overset{\circ}{t} \\ \overset{\circ}{n}_3 \to \Lambda q_{12} \\ \overset{\circ}{n}_2 \to \Lambda w \end{Bmatrix}$$

Cette transformation se présente sous la forme du produit d'une transformation de Lorentz pure par une rotation .

Remarque : on peut écrire aussi

$$\Lambda L_{12}(1) = \Omega_{12} \begin{Bmatrix} \overset{\circ}{t} \to \overset{\circ}{t} \\ \overset{\circ}{n}_3 \to \Lambda q_{12} \\ \overset{\circ}{n}_2 \to \Lambda w \end{Bmatrix} B\left(\overset{\circ}{t} \to \frac{\Omega_{12}^{-1}\ \Lambda p_1}{m_1}\right) .$$

Dans le cas général de masse, c'est-à-dire pour $m_1 - m_2 \neq 0$, $m_3 - m_4 \neq 0$, $m_1 - m_2 \neq m_3 - m_4$ et $m_1 + m_2 \neq m_3 + m_4$, nous aurons besoin d'utiliser deux référentiels R_1 et R_2 . Les développements du type II.8 obtenus figurent dans les tables II.1 et II.2 .

Référentiel R_1 –

$$t^R = \frac{P}{\sqrt{s}} \quad , \quad n_2^R = w_. \quad , \quad n_3^R = q_{12}$$

$$\overrightarrow{e(\Lambda p_1, \Lambda p_3)} = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\omega_1 p\,\sin\theta_s \\ -\frac{i}{2}\,k\,p\,\sin\theta_s \\ \frac{1}{2}\,(\omega_1 p\,\cos\theta_s - \omega_3 k) \end{cases} \qquad \overrightarrow{e(\Lambda p_2, \Lambda p_3)} = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\omega_2 p\,\sin\theta_s \\ \frac{1}{2}\,k\,p\,\sin\theta_s \\ \frac{1}{2}\,(\omega_2 p\,\cos\theta_s + \omega_3 k) \end{cases}$$

$$\Lambda L_{12}(1) = B_1$$
$$\Lambda L_{12}(2) = R_y(\pi)\, B_2$$
$$\Lambda L_{12}(3) = R_y(\theta_s)\, B_3$$
$$\Lambda L_{12}(4) = R_y(\theta_s+\pi)\, B_4$$

où $\quad R_y(\varphi) = \cos\frac{\varphi}{2} - i\sigma_2 \sin\frac{\varphi}{2}$

$$Bi = \frac{m_i + \omega_i - p_{ij}\,\sigma_3}{\sqrt{2m_i\,(\omega_i + m_i)}} \qquad \begin{pmatrix} i = 1,2 \leftrightarrow j = 2,1 \\ i = 3,4 \leftrightarrow j = 4,3 \end{pmatrix}$$

Développement A

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sum_{A_3,A_4} (-1)^{s_2-\lambda_2+s_3+\lambda_3}\, D^{s_1}(B_1)^{\lambda_1}_{\lambda_1}\, D^{s_2}(B_2)^{\lambda_2}_{\lambda_2}\, D^{s_3}(B_3)^{-\lambda_3}_{-\lambda_3}\, D^{s_4}(B_4)^{-\lambda_4}_{-\lambda_4}$$

$$\times\, d^{s_3}(\theta_s)^{A_3}_{-\lambda_3}\, d^{s_4}(\theta_s)^{A_4}_{\lambda_4} \sum_{\ell_1,\ell_2,M_1+M_2=\lambda_1-\lambda_2+A_3+A_4} \mathcal{C}\; a_{\ell_1\ell_2}(s,t)\,(p\,\sin\theta_s)^{|M_1|+|M_2|} \qquad \text{(II.10)}$$

$$\times\, (\omega_1+\varepsilon_1 k)^{|M_1|}\,(\omega_2-\varepsilon_2 k)^{|M_2|}\, P_1\,[t, \omega_1 p\,\cos\theta_s - \omega_3 k]\, P_2\,[u, \omega_2 p\,\cos\theta_s + \omega_3 k]$$

où ε_1 et ε_2 sont les signes de M_1 et M_2

les coefficients $\mathcal{C}$ sont numériques

$P_1(t,z)$ ou $P_2(u,z)$ sont des polynômes de t et z ou de u et z

TABLEAU II_1 – Ce tableau donne la forme explicite A de l'équation (II.9) correspondant au référentiel R_1 qui est très utile pour l'étude des singularités à $S_{34} = 0$ dans le cas général de masse.

Référentiel R_2-

$$t^R = \frac{p}{\sqrt{s}} \quad , \quad n_2^R = w \quad , \quad n_3^R = q_{34}$$

$$\overrightarrow{e(\Lambda p_1, \Lambda p_3)} = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\omega_3 k \sin\theta_s \\ -\frac{i}{2}\,k\,p \sin\theta_s \\ \frac{1}{2}\,(\omega_1 p - \omega_3 k \cos\theta_s) \end{cases} \qquad \overrightarrow{e(\Lambda p_2, \Lambda p_3)} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\,\omega_3 k \sin\theta_s \\ \frac{i}{2}\,k\,p \sin\theta_s \\ \frac{1}{2}\,(\omega_2 p + \omega_3 k \cos\theta_s) \end{cases}$$

$$\Lambda L_{21}(1) = R_y(-\theta_s)\, B_1$$
$$\Lambda L_{21}(2) = R_y(\pi-\theta_s)\, B_2$$
$$\Lambda L_{12}(3) = B_3$$
$$\Lambda L_{12}(4) = R_y(\pi)\, B_4$$

Développement B

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sum_{A_1 A_2} (-1)^{s_2-\lambda_2+s_3+\lambda_3}\, D^{s_1}(B_1)^{\lambda_1}_{\lambda_1}\, D^{s_2}(B_2)^{\lambda_2}_{\lambda_2}\, D^{s_3}(B_3)^{-\lambda_3}_{-\lambda_3}\, D^{s_4}(B_4)^{-\lambda_4}_{-}$$

$$d^{s_1}(-\theta_s)^{A_1}_{\lambda_1}\, d^{s_2}(-\theta_s)^{A_2}_{-\lambda_2} \sum_{\ell_1,\ell_2,M_1+M_2 = A_1+A_2-\lambda_3+\lambda_4} \mathcal{C}'\, a_{\ell_1\ell_2}(s,t)\, (k\sin\theta_s)^{|M_1|+|M_2|}$$

$$(\omega_3+\varepsilon_1 p)^{|M_1|}\,(\omega_3+\varepsilon_2 p)^{|M_2|}\, P_1'[t, \omega_1 p - \omega_3 k\cos\theta_s]\, P_2'[u, \omega_2 p + \omega_3 k\cos\theta_s] \qquad \text{(II.11}$$

où ε_1 et ε_2 sont les signes de M_1 et M_2

les coefficients $\mathcal{C}'$ sont numériques

$P_1'(t,z)$ ou $P_2'(u,z)$ sont des polynômes de t et z ou de u et z

TABLEAU II_2 - Ce tableau donne la forme explicite B de l'équation (II.9) correspondar au référentiel R_2 qui est très utile pour l'étude des singularités à $S_{12} = 0$ dans le cas général de masse.

3) Cas général de masses. Singularités cinématiques à $\Phi(s,t) = 0$

L'équation $\Phi(s,t) = 0$ implique la relation $|\cos\theta_s| = 1$ de sorte que les termes dangereux apparaissant dans l'équation (II.9) sont ceux contenant

$$\sin\frac{\theta_s}{2} \quad \text{et} \quad \cos\frac{\theta_s}{2} \qquad \left(\sin\frac{\theta_s}{2} = \left(\frac{1-\cos\theta_s}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \; ; \; \cos\frac{\theta_s}{2} = \left(\frac{1+\cos\theta_s}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.\right)$$

Nous pouvons évaluer à l'aide de la définition (II.2) des matrices $D^s(M)$ la puissance à laquelle ces facteurs apparaissent dans le développement A (nous obtiendrons le même résultat avec le développement B) . L'amplitude d'hélicité s'écrit alors :

$$M^s_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sum \sin\frac{\theta_s}{2}^{|A_3+\lambda_3|+|A_4-\lambda_4|+|M_1|+|M_2|} \cos\frac{\theta_s}{2}^{|A_3-\lambda_3|+|A_4+\lambda_4|+|M_1|+|M_2|} R(s,t)$$

où la fonction $R(s,t)$ est "régulière" à $\Phi(s,t) = 0$.*

Posons : $\mathcal{A} = |A_3+\lambda_3|+|A_4-\lambda_4|+|M_1|+|M_2|$ $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des nombres

$\mathcal{B} = |A_3-\lambda_3|+|A_4+\lambda_4|+|M_1|+|M_2|$ entiers positifs.

Il est facile de démontrer que le minimum de $\mathcal{A}$ quand on fait varier trois des quatre indices muets A_3, A_4, M_1 et M_2 $(M_1+M_2 = \lambda_1-\lambda_2+A_3+A_4)$ est

---

* Pour alléger le texte nous emploierons les termes suivants :

"régulier" à ... pour : sans point de branchement ni pôle cinématique à ...

"fini" à ... pour : fini en l'absence d'infini dynamique à ...

"uniforme" à ... pour : sans point de branchement cinématique à ...

atteint pour $A_3 = -\lambda_3$, $A_4 = +\lambda_4$, $M_1 = 0$ et vaut $\lambda_1-\lambda_2-(\lambda_3-\lambda_4)$. De même le minimum de $\mathcal{B}$ est atteint pour $A_3 = \lambda_3$, $A_4 = -\lambda_4$; $M_1 = 0$ et vaut $\lambda_1-\lambda_2+(\lambda_3-\lambda_4)$ .En effet chacun des trois indices muets indépendants apparaît deux fois dans les expressions de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$. Si bien que si par exemple un de ces indices varie d'une unité, $\mathcal{A}$ (ou $\mathcal{B}$) n'est pas changé ou a varié de deux unités algébriques. Si l'on opère cette variation à partir des valeurs $A_3 = -\lambda_3$, $A_4 = \lambda_4$, $M_1 = 0$ on voit que $\mathcal{A}$ ne peut pas décroître ; de même pour $\mathcal{B}$ si on opère à partir des valeurs $A_3 = \lambda_3$; $A_4 = -\lambda_4$, $M_1 = 0$.

Conclusion : Le minimum de $\mathcal{A}$ vaut $|\lambda-\mu|$ celui de $\mathcal{B}$ vaut $|\lambda+\mu|$ si on a posé $\lambda = \lambda_1-\lambda_2$, $\mu = \lambda_3-\lambda_4$. De plus les autres valeurs de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$ diffèrent de ces valeurs minimales par des entiers positifs et pairs, ce qui nous permet d'écrire :

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sin\frac{\theta_s}{2}^{|\lambda-\mu|} \cos\frac{\theta_s}{2}^{|\lambda+\mu|} \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \quad , \qquad (II.12)$$

où la fonction $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ est "régulière" à $\Phi(s,t) = 0$.

Ce résultat était déjà connu[7,8] mais, à notre connaissance, n'avait jamais été prouvé. Nous avons en particulier mis en évidence ici l'identité des domaines de convergence dans le plan $\cos\theta_s$ du développement en ondes partielles de l'amplitude d'hélicité $M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$

$$\left(M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sum_J \left(J+\frac{1}{2}\right) M^J_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}\, d^J(\theta_s)^{\mu}_{\lambda} = \sin\frac{\theta_s}{2}^{|\lambda-\mu|} \cos\frac{\theta_s}{2}^{|\lambda+\mu|} \sum a^J_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \times P^{|\lambda-\mu|,|\lambda+\mu|}_{J-m}(\cos\theta_s) \quad ,$$

où m = Maximum $(|\lambda|,|\mu|)$ et $a^J_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ diffère de $M^J_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ par des facteurs numériques) ,

et de la série $\sum_J a^J_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} P^{|\lambda-\mu|,|\lambda+\mu|}_{J-m}(\cos\theta_s)$, le théorème de Szegö[10] sur le domaine de convergence des développements en polynômes orthogonaux, nous assurant que le domaine de convergence du développement en ondes partielles de l'amplitude d'hélicité est complètement caractérisé par les singularités dynamiques.

4) Cas général de masses. Singularités cinématiques aux seuils et pseudo-seuils

A - Etude des singularités aux seuils et pseudo-seuils

Dans les développements A ou B , on reconnaît facilement quels sont les termes singuliers à $s_{12} = 0$ ou $s_{34} = 0$.

a) Les éléments de matrice représentant les transformations de Lorentz pure B_i sont singuliers aux seuils ou aux pseudo-seuils.

En effet : $$D^{s_i}(B_i)^{\lambda_i}_{\lambda_i} = \left[\frac{\omega_i + m_i - p_{ij}}{\sqrt{2m_i(\omega_i + m_i)}}\right]^{2\lambda_i} = \left[\frac{\omega_i + m_i + p_{ij}}{\sqrt{2m_i(\omega_i + m_i)}}\right]^{-2\lambda_i}$$

Examinons le comportement du terme $\omega_i + m_i$.

$$\omega_i + m_i = \frac{(\sqrt{s} + m_i + m_j)(\sqrt{s} + m_i - m_j)}{2\sqrt{s}}$$ où les indices i et j désignent les deux particules de l'état initial ou final. Choisissons comme nous le ferons toujours désormais la détermination "positive" de la fonction $\sqrt{s}$ dans le plan s coupé suivant l'axe réel positif.

On voit alors qu'au seuil $s = (m_i + m_j)^2$, $\omega_i + m_i = 2m_i$.

Mais qu'au pseudo-seuil $s = (m_i - m_j)^2$

$$\begin{cases} \omega_i + m_i = 0 & \text{si} \quad m_i < m_j \\ \omega_i + m_i = 2m_i & \text{si} \quad m_i > m_j \end{cases} .$$

Nous sommes donc conduits à examiner séparément les seuils et les pseudo-seuils. En effet pour toutes les valeurs de s pour lesquelles $\omega_i + m_i$ est différent de zéro, l'élément de matrice

$D^{s_i}(B_i)^{\lambda_i}_{\lambda_i}$ s'écrit simplement $\left(\frac{\omega_i - p_{ij}}{m_i}\right)^{\lambda_i}$. Si l'on tourne alors autour d'un seuil $s = (m_i + m_j)^2$ en gardant la détermination "positive" de la fonction $\sqrt{s}$, la fonction $\frac{\omega_i - p_{ij}}{m_i}$ se change en son inverse $\frac{\omega_i + p_{ij}}{m_i}$ $\left(\text{à} \quad s = (m_i + m_j)^2, \ \frac{\omega_i - p_{ij}}{m_i} = 1\right)$. Le même résultat est valable au pseudo-seuil $s = (m_i - m_j)^2$ pour l'élément de matrice $D^{s_i}(B_i)$ de la particule la plus lourde. Pour la particule la plus légère, le terme $\omega_i + m_i$ s'annule au pseudo-seuil. Le terme $\frac{\omega_i + m_i - p_{ij}}{\sqrt{2m_i\,(\omega_i + m_i)}}$ se change alors en l'opposé de son inverse.

b) Les fonctions $\cos\theta_s$ et $\sin\theta_s$ sont singulières aux seuils et pseudo-seuils, car elles se comportent comme $(S_{12}\, S_{34})^{-1}$.

c) Les fonctions $d^s(\theta_s)$ sont également singulières puisque $\cos\theta_s$ l'est.

B - Etude des points de branchement cinématiques aux seuils et pseudo-seuils

a) Seuils

i) $s = (m_3 + m_4)^2$. On se sert pour cette étude du développement A de l'amplitude d'hélicité dans le référentiel R_1 (II.10) . En effet, tous les termes qui apparaissent dans le développement de Joos sont "réguliers" à $s = (m_3 + m_4)^2$.

Si l'on tourne autour du seuil $s = (m_3 + m_4)^2$ en conservant la détermination "positive" de la fonction $\sqrt{s}$, on voit d'après le paragraphe précédent que θ_s se change en $\theta_s \pm \pi$, p en -p et :

$$\left(\frac{\omega_i - p}{m_i}\right)^{\pm \lambda_i} \quad \text{en} \quad \left(\frac{\omega_i - p}{m_i}\right)^{\mp \lambda_i} \quad \text{pour} \quad i = 3,4 .$$

Alors, utilisant le développement A , on voit que l'amplitude

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\varphi_{34}) = (-1)^{s_2 - \lambda_2 + s_3 + \lambda_3} \sin\frac{\theta_s}{2}^{-|\lambda-\mu|} \cos\frac{\theta_s}{2}^{-|\lambda+\mu|} \left(\frac{\omega_3 - p}{m}\right)^{-\lambda_3} \left(\frac{\omega_4 - p}{m}\right)^{-\lambda_4}$$

$$\times \; d^{s_3}(\theta_s)^{A_3}_{-\lambda_3} \; d^{s_4}(\theta_s)^{A_4}_{\lambda_4} \; \ldots .$$

se change en l'amplitude*:

---

* Quand nous étudions le comportement d'une fonction f au voisinage du point de branchement du type racine carrée, nous écrirons par commodité $f(\sqrt{z})$ et $f(-\sqrt{z})$ pour les deux déterminations f^I et f^{II} de la fonction f au point z .

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\varphi_{34}) = (-1)^{s_2-\lambda_2+s_3+\lambda_3} \sin\left(\frac{\theta_s \pm \pi}{2}\right)^{-|\lambda-\mu|} \cos\left(\frac{\theta_s \pm \pi}{2}\right)^{-|\lambda+\mu|} \left(\frac{\omega_3 - p}{m}\right)^{\lambda_3}$$

$$\times \left(\frac{\omega_4 - p}{m}\right)^{\lambda_4} d^{s_3}(\theta_s \pm \pi)^{A_3}_{-\lambda_3} d^{s_4}(\theta_s \pm \pi)^{A_4}_{-\lambda_4} \cdots$$

(les pointillés remplacent les termes "réguliers" à $s = (m_3 + m_4)^2$).

On trouve alors facilement la relation :

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\varphi_{34}) = \eta_{34} \hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\varphi_{34}) \quad \text{avec} \quad \eta_{34} = (-1)^{s_3 - s_4 + \lambda} . \qquad \text{(II.13)}$$

Remarques : α) Les fonctions $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ étant "régulières" à $\Phi(s,t) = 0$, il est normal que l'ambiguïté de signe intervenant dans la définition de $\theta_s(-\varphi_{34}) = \theta_s(\varphi_{34}) \pm \pi$ n'ait pas d'effet sur la relation (II.13).

β) La phase η_{34} ne dépend pas des hélicités finales .

ii) $s = (m_1 + m_2)^2$: le raisonnement précédent se reproduit exactement quand on utilise le référentiel R_2 . Si on tourne autour du point $s = (m_1 + m_2)^2$ en conservant la détermination "positive" de la fonction $\sqrt{s}$, on obtient la relation :

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\varphi_{12}) = \eta_{12} \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}(\varphi_{12}) \qquad \eta_{12} = (-1)^{s_1 - s_2 - \mu} . \qquad \text{(II.14)}$$

Là encore η_{12} ne dépend pas de l'hélicité initiale.

b) Pseudo-seuils

Comme l'étude précédente l'a montré, (§ A), une phase $(-)^{2s_i}$ s'introduit lorsqu'on tourne autour d'un pseudo-seuil $s = (m_1 - m_2)^2$ ou $s = (m_3 - m_4)^2$. Ici, i désigne la particule la plus légère de l'état initial ou de l'état final respectivement. A ceci près, tout se passe comme pour les seuils.

En résumé : i) $s = (m_3 - m_4)^2$.

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\Psi_{34}) = \eta_{34}(-1)^{2s_3}\,\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\Psi_{34}) \quad \text{si} \quad m_4 > m_3$$
$$= \eta_{34}(-1)^{2s_4}\,\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\Psi_{34}) \quad \text{si} \quad m_3 > m_4 \qquad \text{(II.15)}$$

ii) $s = (m_1 - m_2)^2$.

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\Psi_{12}) = \eta_{12}(-1)^{2s_1}\,\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}(\Psi_{12}) \quad \text{si} \quad m_2 > m_1$$
$$= \eta_{12}(-1)^{2s_2}\,\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}(\Psi_{12}) \quad \text{si} \quad m_1 > m_2 \qquad \text{(II.16)}$$

C - Suppression des points de branchement cinématiques aux seuils et pseudo-seuils

Grâce aux relations (II.13 , II.14 , II.15 , II.16) , nous pouvons trouver des combinaisons linéaires des amplitudes $\hat{M}_{\{\lambda\}}$ qui sont "uniformes" aux seuils $s = (m_1 + m_2)^2$ ou $s = (m_3 + m_4)^2$.

Pour cela définissons les quatre fonctions suivantes :

$$A_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} + \eta_{34}\,\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} + \eta_{12}\left[\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2} + \eta_{34}(-\lambda_1,-\lambda_2)\,\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;-\lambda_1-\right.$$

$$B_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} - \eta_{34}\,\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} + \eta_{12}\left[\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2} - \eta_{34}(-\lambda_1,-\lambda_2)\,\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;-\lambda_1-\right.$$

$$C_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} + \eta_{34}\,\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} - \eta_{12}\left[\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2} - \eta_{34}(-\lambda_1,-\lambda_2)\,\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;-\lambda_1-\right.$$

$$D_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} - \eta_{34}\,\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} - \eta_{12}\left[\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2} + \eta_{34}(-\lambda_1,-\lambda_2)\,\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;-\lambda_1-\right.$$

(II.1

où $\eta_{34}(-\lambda_3-\lambda_4) = (-1)^{s_3 - s_4 - \lambda}$.

Il est facile de vérifier que les quatre fonctions $A_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$, $\varphi_{34}^{-1}\, B_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$, $\varphi_{12}^{-1}\, C_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ et $\varphi_{12}^{-1}\,\varphi_{34}^{-1}\, D_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ sont "uniformes" aux deux seuils de la réaction.

Supposons maintenant que la parité est conservée (nous reviendrons sur ce point à la fin de ce chapitre). Alors l'amplitude $\hat{M}_{\{\lambda\}}$ est reliée à l'amplitude $\hat{M}_{\{\lambda\}}$ (voir équation II.6) par la relation

$$\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2} = \eta(-1)^{\sum_i (s_i + \lambda_i)}\, \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$$

où η désigne le produit des quatre parités intrinsèques des particules.

Cette relation peut encore s'écrire :

$$\eta_{12}\,\eta_{34}\,(-\lambda_3-\lambda_4)\,\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2} = \eta\,\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$$

ou :
$$\eta_{12}\,\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2} = \eta\,\eta_{34}\,\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \quad ,$$

si bien qu'il est possible de trouver des amplitudes "uniformes" aux deux seuils en associant seulement deux amplitudes d'hélicité différentes.

Pour cela nous introduisons les quatre fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{34} &= \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} + \eta_{34}\,\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \\
\mathcal{B}_{34} &= \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} - \eta_{34}\,\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \qquad \text{(II.18)} \\
\mathcal{A}_{12} &= \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} + \eta_{12}\,\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2} \\
\mathcal{B}_{12} &= \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} - \eta_{12}\,\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}
\end{aligned}$$

On voit alors que : i) si $\eta = +1$ les fonctions $\mathcal{A}_{34} = \mathcal{A}_{12}$ et $\varphi_{12}^{-1}\varphi_{34}^{-1}\,\mathcal{B}_{34} = \varphi_{12}^{-1}\varphi_{34}^{-1}\,\mathcal{B}_{12}$ sont "uniformes" aux deux seuils.

ii) si $\eta = -1$ les fonctions $\varphi_{34}^{-1}\,\mathcal{B}_{34} = \varphi_{34}^{-1}\,\mathcal{A}_{12}$ et $\varphi_{12}^{-1}\,\mathcal{A}_{34} = \varphi_{12}^{-1}\,\mathcal{B}_{12}$ sont "uniformes" aux deux seuils.

Des résultats analogues sont obtenus pour les pseudo-seuils à l'aide des relations (II.15) et (II.16) . Le tableau II_{3_2} montre explicitement quelles sont les amplitudes "uniformes" à $s = (m_1 \pm m_2)^2$ et $s = (m_3 \pm m_4)^2$.

D - Pôles cinématiques aux seuils et aux pseudo-seuils

Les fonctions "uniformes" du paragraphe précédent peuvent avoir des pôles ou des zéros aux seuils et aux pseudo-seuils. Nous sommes conduits à étudier le comportement des amplitudes d'hélicité au voisinage de $S_{12} = 0$ ou $S_{34} = 0$, en supposant qu'en ces points les amplitudes invariantes de Joos sont finies et différentes de zéro.

a) Voisinage de $S_{34} = 0$

Nous utilisons le développement A Eq.(II.10) dans le référentiel R_1 ; on remarque que : i) les semi-bivecteurs sont finis à $S_{34} = 0$

ii) les éléments de matrice des transformations de Lorentz pures associées aux particules finales sont de module 1 à $S_{34} = 0$

iii) l'élement de matrice $d^s(\theta_s)^a_b$ est un polynôme homogène de degré 2s en $\cos\frac{\theta_s}{2}$ et $\sin\frac{\theta_s}{2}$. Puisque $\cos\theta_s$ se comporte comme S_{34}^{-1} au voisinage de $S_{34} = 0$, $\cos\frac{\theta_s}{2}$ et $\sin\frac{\theta_s}{2}$ se comportent comme $S_{34}^{-\frac{1}{2}}$ au voisinage de $S_{34} = 0$ et donc $d^s(\theta_s)$ se comporte comme S_{34}^{-s} .

Il est maintenant facile de trouver le comportement de l'amplitude $M_{\{\lambda\}}$, puis de l'amplitude $\hat{M}_{\{\lambda\}}$ au voisinage de $S_{34} = 0$.

On obtient : $$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \simeq S_{34}^{-(s_3+s_4)} , \qquad (II.19)$$

et : $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \simeq S_{34}^{-m_{34}}$ où : $m_{34} = s_3 + s_4 - \text{Max}(|\lambda|, |\mu|)$.

Type de réaction \ Parité intrinsèque	Amplitudes "uniformes" à $s = (m_1 \pm m_2)^2$ et $s = (m_3 \pm m_4)^2$	
	$\eta = +1$ $\mathcal{A}_{34} = \mathcal{A}_{12}$ $\mathcal{B}_{34} = \mathcal{B}_{12}$	$\eta = -1$ $\mathcal{A}_{34} = \mathcal{B}_{12}$ $\mathcal{B}_{34} = \mathcal{A}_{12}$
B B → B B ou B F → B'F' avec $m_F > m_B$ et $m_{F'} > m_{B'}$	$\mathcal{A}_{34}$, $S_{12}^{-1} S_{34}^{-1} \mathcal{B}_{34}$	$S_{34}^{-1} \mathcal{B}_{34}$, $S_{12}^{-1} \mathcal{A}_{34}$
B B → F $\bar{F}$ ou B F → B'F' avec $m_F > m_B$ et $m_{F'} < m_{B'}$	$\Psi_{34}^{-1} \mathcal{A}_{34}$, $S_{12}^{-1} \varphi_{34}^{-1} \mathcal{B}_{34}$	$\varphi_{34}^{-1} \mathcal{B}_{34}$, $S_{12}^{-1} \Psi_{34}^{-1} \mathcal{A}_{34}$
F $\bar{F}$ → B B ou B F → B'F' avec $m_F < m_B$ et $m_{F'} > m_{B'}$	$\Psi_{12}^{-1} \mathcal{A}_{34}$, $\varphi_{12}^{-1} S_{34}^{-1} \mathcal{B}_{34}$	$\Psi_{12}^{-1} \mathcal{B}_{34}$, $\varphi_{12}^{-1} S_{34}^{-1} \mathcal{A}_{34}$
F F → F F ou B F → B'F' avec $m_F < m_B$ et $m_{F'} < m_{B'}$	$\Psi_{12}^{-1} \Psi_{34}^{-1} \mathcal{A}_{34}$, $\varphi_{12}^{-1} \varphi_{34}^{-1} \mathcal{B}_{34}$	$\Psi_{12}^{-1} \varphi_{34}^{-1} \mathcal{B}_{34}$, $\varphi_{12}^{-1} \Psi_{34}^{-1} \mathcal{A}_{34}$

TABLEAU II.3 - La lettre capitale B désigne un boson de masse m_B ;
F désigne un fermion de masse m_F .

b) Voisinage de $S_{12} = 0$

Le même argument sur le développement B Eq. (II.11) dans le référentiel R_2 permet d'obtenir :

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \simeq S_{12}^{m_{12}} \quad \text{où} \quad m_{12} = s_1 + s_2 - \text{Max}\,(|\lambda|, |\mu|). \tag{II.20}$$

Muni de ces résultats, on peut alors trouver l'ordre des pôles des fonctions "uniformes" $\mathcal{A}_{12}$, $\mathcal{A}_{34}$, $\mathcal{B}_{12}$, $\mathcal{B}_{34}$.

On remarque tout d'abord que m_{12} et m_{34} sont des nombres entiers indépendants du signe des hélicités. Si l'on considère le cas d'une réaction boson + boson → boson + boson avec $\eta = +1$, l'équation (II.20) nous permet d'écrire :

$$\mathcal{A}_{34} = \frac{\alpha_{34} + S_{12}\,\beta_{34}}{S_{12}^{m_{12}}} \quad \text{où} \quad \alpha_{34} \text{ et } \beta_{34} \text{ sont "réguliers" à } S_{12} = 0 .$$

Mais la fonction $\mathcal{A}_{34}$ est uniforme à $S_{12} = 0$. On en déduit : $\beta_{34} \equiv 0$ si m_{12} est pair et $\alpha_{34} \equiv 0$ si m_{12} est impair.

Définissons les deux entiers pairs $m_{12}^{\pm}$ $= m_{12}$ si m_{12} est pair

$= m_{12} \pm 1$ si m_{12} est impair

on voit que la fonction $S_{12}^{\bar{m}_{12}}\,\mathcal{A}_{34}$ est "régulière" à $S_{12} = 0$.

Tous les autres cas sont traités suivant la même méthode. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau II_4 .

5) Singularités cinématiques à $s = 0$

La singularité à $s=0$ n'apparaît pas dans les quadri-vecteurs des tétrades d'hélicité des quatre particules. Cependant elle apparaît explicitement dans les développements A (II.10) ou B (II.11)

A - Comportement des éléments de matrices des transformations de Lorentz pures au voisinage de $s = 0$

Le comportement d'un élément de matrice au voisinage de $s = 0$ dépend de la détermination de la fonction S_{ij}.

En effet : $$\omega_i - p_{ij} = \frac{m_i^2 - m_j^2 + s - S_{ij}}{2\sqrt{s}} .$$

Au voisinage de $s = 0$, $S_{ij} = - \varepsilon \left| m_i^2 - m_j^2 \right| + O(s)$ où $\varepsilon = \pm 1$

suivant le choix de la détermination de la fonction S_{ij} dans le plan s.

Par exemple, $\varepsilon = + 1$ si la fonction S_{ij} est définie dans le plan s coupé sur l'axe réel de $(m_i - m_j)^2$ à $(m_i + m_j)^2$ et si elle est positive pour $s > 0$ grand.

Conclusion : $\omega_i - p_{ij}$ se comporte comme $\sqrt{s} - \varepsilon \varepsilon_{ij}$, (II.21)

au voisinage de $s = 0$, où $\varepsilon_{ij} = \frac{m_i - m_j}{|m_i - m_j|}$.

B - Comportement de $\cos\theta_s$ au voisinage de $s = 0$

Puisque $\cos\theta_s = \frac{s(t-u)+(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{S_{12} \quad S_{34}}$, on déduit immédiatement que , $\cos\theta_s = \varepsilon_{12} \varepsilon_{34} + O(s)$ au voisinage de $s = 0$, si S_{12} et S_{34} sont définis de la même façon. (II.22)

C - Comportement des semi-bivecteurs au voisinage de $s = 0$

On remarque d'abord que les deux semi-bivecteurs ont des normes qui sont des polynômes en t ou en u.

En effet : $\overrightarrow{e\,(\Lambda p_1, \Lambda p_3)}^2 = \frac{1}{4}\,(m_1^2\, m_3^2 - (p_1.p_3)^2)$

et $\overrightarrow{e\,(\Lambda p_2, \Lambda p_3)}^2 = \frac{1}{4}\,(m_2^2\, m_3^2 - (p_2.p_3)^2)$

De plus dans le référentiel R_1, la somme $e_1^2(\Lambda p_1, \Lambda p_3) + e_2^2(\Lambda p_1, \Lambda p_3) = \frac{1}{4}\, m_1^2\, p^2$ sin est finie et régulière à $s = 0$. Donc $e_3^2(\Lambda p_1, \Lambda p_3) = \overrightarrow{e(\Lambda p_1}^2, \Lambda p_3) - \frac{1}{4}\, m_1^2\, p^2 \sin^2\theta_s$ est fini à $s = 0$. La composante $e_3(\Lambda p_1, \Lambda p_3)$ étant uniforme à $s = 0$ est donc également finie à $s = 0$. Le même résultat est valable pour le second semi-bivecteur $\overrightarrow{e(\Lambda p_2, \Lambda p_3)}$.

D - Comportement des amplitudes d'hélicité au voisinage de $s = 0$

On utilise le développement A Eq. (II.10)(le même résultat s'obtient d'ailleurs avec le développement B Eq. (II.11). On voit que chaque terme de ce développement se comporte au voisinage de $s = 0$ comme :

$$\sqrt{s}^{\,-\varepsilon\,\varepsilon_{12}(\lambda_1-\lambda_2)+\varepsilon\,\varepsilon_{34}(\lambda_3-\lambda_4)+\varepsilon\,\varepsilon_{12}(M_1+M_2)+|A_3+\varepsilon_{12}\varepsilon_{34}\lambda_3|+|A_4-\varepsilon_{12}\varepsilon_{34}\lambda_4|}$$

Puisque $M_1 + M_2 = \lambda_1 - \lambda_2 + A_3 + A_4$, on peut écrire l'exposant sous la forme : $|A_3+\varepsilon_{12}\varepsilon_{34}\lambda_3|+\varepsilon\,\varepsilon_{12}(A_3+\varepsilon_{12}\varepsilon_{34}\lambda_3)+|A_4-\varepsilon_{12}\varepsilon_{34}\lambda_4|+\varepsilon\,\varepsilon_{12}(A_4-\varepsilon_{12}\varepsilon_{34}\lambda_4|$.

L'exposant est donc manifestement un nombre entier pair non négatif. Il atteint d'ailleurs la valeur 0 pour $\begin{cases} A_3 = -\,\varepsilon_{12}\varepsilon_{34}\lambda_3 \\ \text{et} \quad A_4 = \varepsilon_{12}\varepsilon_{34}\lambda_4 \end{cases}$

Les amplitudes d'hélicité n'ont donc aucune singularité cinématique à $s = 0$, ce qui était attendu d'ailleurs car les quadri-vecteurs de base des tétrades d'hélicité ne sont pas singuliers à $s = 0$.

Cependant l'amplitude $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sin\frac{\theta}{2}^{-|\lambda-\mu|} \cos\frac{\theta}{2}^{-|\lambda+\mu|} M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ est singulière à $s = 0$ puisqu'elle se comporte comme $\sqrt{s}^{-|\lambda-\varepsilon_{12}\varepsilon_{34}\mu|}$ au voisinage de $s = 0$.

Dans le cas d'une réaction Boson + Fermion → Boson + Fermion, et dans ce cas seulement, les nombres entiers $|\lambda-\mu|$ et $|\lambda+\mu|$ n'ont pas la même parité. Or la régularisation aux seuils et pseudo-seuils exige le mélange d'amplitudes qui se comportent à $s = 0$ comme $\sqrt{s}^{-|\lambda-\mu|}$ et $\sqrt{s}^{-|\lambda+\mu|}$. On voit donc qu'il est impossible de régulariser simultanément les amplitudes d'hélicité à $\Phi(s,t) = 0$, $S_{12} = 0$, $S_{34} = 0$ et $s = 0$ dans le cas d'une réaction Boson + Fermion → Boson + Fermion.

<u>En résumé</u> : les fonctions $\mathcal{A}_{34}$ et $\mathcal{B}_{34}$ se comportent au voisinage de $s = 0$ comme

$$\sqrt{s}^{-(|\lambda|+|\mu|)} \left[\alpha(s,t) + \sqrt{s}^{2\mathrm{Min}(|\lambda|,|\mu|)} \beta(s,t) \right] \qquad \text{(II.23)}$$

où les fonctions $\alpha(s,t)$ et $\beta(s,t)$ sont "régulières" à $s = 0$.

6) <u>Cas général de masse. Résumé et conclusion</u>

A - <u>Résultat</u>

Tous les résultats obtenus au cours de cette longue étude sont contenus dans le tableau résumé II_4. Dans ce tableau nous avons écrit explicitement les amplitudes construites à partir des amplitudes d'hélicité et qui sont "régulières". Ce tableau n'est valable que dans le cas où la parité est conservée.

Notations

$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$; $\mu = \lambda_3 - \lambda_4$; $\eta_{12} = (-1)^{s_1 - s_2 - \mu}$; $\eta_{34} = (-1)^{s_3 - s_4 + \lambda}$

$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4$, produit des parités intrinsèques.

$m_{12} = s_1 + s_2 - \mathrm{Max}(|\lambda|, |\mu|)$; $m_{34} = s_3 + s_4 - \mathrm{Max}(|\lambda|, |\mu|)$.

Quand N est un entier, $N^{\pm} = \begin{cases} N & \text{si } N \text{ est pair} \\ N \pm i & \text{si } N \text{ est impair} \end{cases}$

$\varphi_{ij} = \sqrt{s - (m_i + m_j)^2}$ $\qquad$ $\Psi_{ij} = \sqrt{s - (m_i - m_j)^2}$

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sin\frac{\theta}{2}^{s - |\lambda - \mu|} \cos\frac{\theta}{2}^{s - |\lambda + \mu|} M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$$

Amplitudes "régulières" dans le cas général de masse

$$F^1_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{|\lambda| + |\mu|} \Psi_{12}^a \varphi_{12}^b \Psi_{34}^c \varphi_{34}^d \left(\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} + \eta_{34} \hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \right.$$

ou

$$\left. + \eta\eta_{12} \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2} \right)$$

$$F^2_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{|\lambda| + |\mu|} \Psi_{12}^\alpha \varphi_{12}^\beta \Psi_{34}^\gamma \varphi_{34}^\delta \left(\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} - \eta_{34} \hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \right.$$

ou

$$\left. - \eta\eta_{12} \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2} \right)$$

Réaction \ Exposants		a	b	c	d	α	β	γ	δ
BB → BB ou BF → B'F'	$\eta = +1$	m_{12}^-	m_{12}^-	m_{34}^-	m_{34}^-	m_{12}^{+-1}	m_{12}^{+-1}	m_{34}^{+-1}	m_{34}^{+-}
$m_F > m_B$ et $m_{F'} > m_{B'}$	$\eta = -1$	m_{12}^{+-1}	m_{12}^{+-1}	m_{34}^-	m_{34}^-	m_{12}^-	m_{12}^-	m_{34}^{+-1}	m_{34}^{+-}
BB → FF ou BF → B'F'	$\eta = +1$	m_{12}^-	m_{12}^-	m_{34}^{+-1}	m_{34}^-	m_{12}^{+-1}	m_{12}^{+-1}	m_{34}^-	m_{34}^{+-}
$m_F > m_B$ et $m_{F'} < m_{B'}$	$\eta = -1$	m_{12}^{+-1}	m_{12}^{+-1}	m_{34}^{+-1}	m_{34}^-	m_{12}^-	m_{12}^-	m_{34}^-	m_{34}^{+-}
FF → BB ou BF → B'F'	$\eta = +1$	m_{12}^{+-1}	m_{12}^-	m_{34}^-	m_{34}^-	m_{12}^-	m_{12}^{+-1}	m_{34}^{+-1}	m_{34}^{+-}
$m_F < m_B$ et $m_{F'} > m_{B'}$	$\eta = -1$	m_{12}^-	m_{12}^{+-1}	m_{34}^-	m_{34}^-	m_{12}^{+-1}	m_{12}^-	m_{34}^{+-1}	m_{34}^{+-}
FF → FF ou BF → B'F'	$\eta = +1$	m_{12}^{+-1}	m_{12}^-	m_{34}^{+-1}	m_{34}^-	m_{12}^-	m_{12}^{+-1}	m_{34}^-	m_{34}^{+-}
$m_F < m_B$ et $m_{F'} < m_{B'}$	$\eta = -1$	m_{12}^-	m_{12}^{+-1}	m_{34}^{+-1}	m_{34}^-	m_{12}^{+-1}	m_{12}^-	m_{34}^-	m_{34}^{+-}

TABLEAU II$_4$

Dans le cas des réactions Boson + Fermion → Boson + Fermion, quelques remarques s'imposent :

a) Il reste une singularité cinématique du type racine carrée à $s = 0$.

b) La régularisation aux seuils et pseudo-seuils dépend du choix de la détermination de la fonction $\sqrt{s}$. Les résultats donnés ici ont été obtenus en choisissant la détermination "positive" de la fonction $\sqrt{s}$. Avec l'autre détermination, les résultats obtenus sont légèrement différents. Mais puisque les amplitudes d'hélicité sont "régulières" à $s = 0$,il nous est facile de relier entre elles les deux déterminations des amplitudes d'hélicité "régulières" correspondant aux deux déterminations de la fonction $\sqrt{s}$. On trouve alors :

$$F^1_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\sqrt{s}) = (-1)^{|\lambda|+|\mu|+|\lambda-\varepsilon_{12}\varepsilon_{34}\mu|} F^2_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\sqrt{s}) \ . \qquad \text{(II.24)}$$

Comme l'a déjà remarqué Y. Hara[7], ces relations peuvent être interprétées comme une généralisation de la relation de réciprocité de Mac Dowell[15]. En fait l'équation (II.23) est beaucoup plus riche en information que l'équation (II.24) car elle donne le comportement des amplitudes d'hélicité "régularisées" au voisinage de $s = 0$.

B - Discussion et Conclusion

Si la parité n'est pas conservée,nous avons en général N amplitudes invariantes de Joos indépendantes $a_{\ell_1\ell_2}(s,t)$ $(N = \prod_i (2s_i + 1))$. La conservation de la parité implique des relations entre ces fonctions $a_{\ell_1\ell_2}(s,t)$ qui ne sont pas encore connues dans le cas général de spin. Mais la conservation de la parité s'exprime facilement sur les amplitudes d'hélicité Eq.(II.6) donc sur les amplitudes d'hélicité "régularisées". On trouve en effet la même relation :

$$F^i_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \equiv \eta(-1)^{\sum_i (s_i+\lambda_i)} F^i_{-\lambda_3-\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2} \quad (i=1,2) \ . \qquad \text{(II.25)}$$

Si l'on fait un décompte des amplitudes d'hélicité "régularisées", quand on suppose que la parité est conservée pour la réaction, on s'aperçoit qu'il dépasse le nombre d'amplitudes indépendantes du problème. C'est donc qu'il existe des relations entre elles. Les relations sont tout simplement :

$$F^i_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \pm\,\eta_{34}\, F^i_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \pm\eta\,\eta_{12}\, F^i_{\lambda_1\lambda_2;-\lambda_3-\lambda_4} \qquad (i = 1,2)\ . \qquad \text{(II.26)}$$

Si l'on tient compte de ces relations, on voit qu'on a exactement le nombre requis d'amplitudes indépendantes.

Dans le cas où la parité n'est pas conservée, le même procédé de régularisation peut être appliqué . Quatre combinaisons appropriées des amplitudes $\hat{M}_{\lambda_f;\lambda_i}$, $\hat{M}_{\lambda_f,-\lambda_i}$, $\hat{M}_{-\lambda_f,\lambda_i}$ et $\hat{M}_{-\lambda_f,-\lambda_i}$ sont utilisées pour obtenir l'uniformité aux seuils et pseudo-seuils (équation II.17). Le comportement au voisinage de $s = 0$ dépend également de la configuration de spin. La non conservation de la parité ne modifie pas l'ordre des pôles cinématiques à $\varphi_{12} = 0$, $\Psi_{12} = 0$, $\varphi_{34} = 0$, $\Psi_{34} = 0$ et $s = 0$ puisque cet ordre dépend uniquement des valeurs absolues de λ et de μ . Ici encore, nous avons construit trop d'amplitudes $F^i_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ $(i = 1,2,3,4)$ mais pour chaque i , les amplitudes $F^i_{\lambda_f,\lambda_i}$, $F^i_{-\lambda_f,\lambda_i}$, $F^i_{\lambda_f,-\lambda_i}$ et $F^i_{-\lambda_f,-\lambda_i}$ sont simplement reliées deux à deux (voir équation II.17), si bien que nous obtenons le nombre exact d'amplitudes indépendantes requis.

Les résultats de cette section consacrée à la "régularisation" des amplitudes d'hélicité peuvent se résumer de la manière suivante :

a) De nouvelles fonctions $F^i_{\{\lambda\}}$ sont définies ($i = 1,2$ si la parité est conservée, $i = 1,\ldots 4$ si la parité n'est pas conservée). Elles sont reliées aux amplitudes invariantes de Joos $a_{\ell_1\ell_2}(s,t)$ par l'intermédiaire de polynômes en s et t *

---

* Si la voie s correspond à un cas Boson + Fermion → Boson + Fermion, la variable s doit être remplacée par la variable $\sqrt{s}$.

b) Parmi l'ensemble des fonctions $F^{i}_{\{\lambda\}}$ on peut choisir un ensemble d'amplitudes indépendantes dénotées $\mathcal{F}_{\{\lambda\}}$. Toute cette étude se résume alors formellement dans la relation :

$$\mathcal{F}_{\{\lambda\}} = \sum_{\ell_1,\ell_2} C^{\ell_1\ell_2}_{\{\lambda\}} \; a_{\ell_1\ell_2} \quad , \tag{II.27}$$

où les coefficients $C^{\ell_1\ell_2}_{\{\lambda\}}$ sont des polynômes en s * et t .

7) Cas particuliers : égalité entre les masses de certaines particules

Nous ne pouvons malheureusement pas appliquer directement les méthodes de l'étude générale chaque fois que deux singularités cinématiques coïncident. Par exemple dans le cas d'une réaction élastique ($m_1 = m_3$, $m_2 = m_4$) , les deux seuils se confondent ainsi que les deux pseudo-seuils ($S_{12} = S_{34}$) . Le résultat général obtenu à l'aide des développements A ou B (Eq. II.10 et II.11) ne s'applique pas car la troisième composante des deux semi-bivecteurs est maintenant singulière à $S_{12} = 0$. Pour ne pas alourdir ce trop long chapitre, les détails des calculs sont traités dans l'appendice A_I . † Nous montrons dans le tableau II_5 quelles sont les singularités qui coïncident, selon les cas d'égalité de masses, et qui nécessitent donc une étude particulière. Les résultats sont résumés dans les tableaux II_6 , II_7 , II_8 , II_9 et II_{10} .

---

† Nous ne traitons explicitement que les cas où, lorsque les masses de deux particules coïncident, il en est de même de leurs spins et de leurs parités intrinsèques sauf si on a affaire à un fermion et à son anti-particule.

---

* Si la voie s correspond à un cas Boson + Fermion → Boson + Fermion, la variable s doit être remplacée par la variable $\sqrt{s}$.

singularités cinématiques / Configuration	$s = 0$	$S_{12} = 0$	$S_{34} = 0$
$m_1 = m_3$ $m_1 \neq m_2$ voir tableau II_8 $m_2 = m_4$		×	×
$m_1 = m_2$ voir tableau II_6 $m_3 \neq m_4$	×	×	
$m_3 = m_4$ voir tableau II_7 $m_1 \neq m_2$	×		×
$m_1 = m_2 = m$ $m \neq m'$ voir tableau II_9 $m_3 = m_4 = m'$	×	×	×
$m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ voir tableau II_{10}	×	×	×

TABLEAU II_5 : Les croix à l'intérieur des cas indiquent quelles sont les singularités qui nécessitent une étude spéciale.

CAS I : $m_1 = m_2$; $m_3 \neq m_4$

$s_1 = s_2 = s_i$ $\quad k = \frac{1}{2}\sqrt{s - 4m_1^2}$

Amplitudes "régulières"

$$F^1_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{\,a'}\, k^{b'}\, \Psi^c_{34}\, \varphi^d_{34} \left(\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} + \eta_{34}\, \hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \right.$$

ou

$$\left. + \eta\eta_{12}\, \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2} \right)$$

$$F^2_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{\,\alpha'}\, k^{\beta'}\, \Psi^\gamma_{34}\, \varphi^\delta_{34} \left(\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} - \eta_{34}\, \hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \right.$$

ou

$$\left. - \eta\eta_{12}\, \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2} \right)$$

Réaction \ valeur des exposants		a'	b'	α'	β'
$\sum_i \lambda_i$ pair	$\eta = +1$	$(2s_i)^-$	m_{12}^-	$(2s_i)^+ - 1$	$m_{12}^+ - 1$
	$\eta = -1$	$(2s_i)^+ - 1$	$m_{12}^+ - 1$	$(2s_i)^-$	m_{12}^-
$\sum_i \lambda_i$ impair	$\eta = +1$	$(2s_i)^+ - 1$	m_{12}^-	$(2s_i)^-$	$m_{12}^+ - 1$
	$\eta = -1$	$(2s_i)^-$	$m_{12}^+ - 1$	$(2s_i)^+ - 1$	m_{12}^-

Les exposants c , d , γ et δ sont définis comme dans le tableau II_4 .

TABLEAU II_6

CAS II : $m_3 = m_4$; $m_1 \neq m_2$

$s_3 = s_4 = s_f$; $p = \frac{1}{2}\sqrt{s - 4\,m_3'^2}$

Amplitudes "régulières"

$$F^1_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{\,c'}\ \Psi_{12}^{\,a}\ \varphi_{12}^{\,b}\ p^{d'}\ \left(\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} + \eta_{34}\,\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}\right.$$

ou

$$\left. + \eta\eta_{12}\,\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}\right)$$

$$F^2_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{\,\gamma'}\ \Psi_{12}^{\,\alpha}\ \varphi_{12}^{\,\beta}\ p^{\delta'}\ \left(\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} - \eta_{34}\,\hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}\right.$$

ou

$$\left. - \eta\eta_{12}\,\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}\right)$$

Réaction \ valeur des exposants		c'	d'	γ'	δ'
$\sum_i \lambda_i$ pair	$\eta = +1$	$(2s_f)^-$	m_{34}^-	$(2s_f)^+ - 1$	$(m_{34})^+ - 1$
	$\eta = -1$	$(2s_f)^-$	m_{34}^-	$(2s_f)^+ - 1$	$(m_{34})^+ - 1$
$\sum_i \lambda_i$ impair	$\eta = +1$	$(2s_f)^+ - 1$	m_{34}^-	$(2s_f)^-$	$(m_{34})^+ - 1$
	$\eta = -1$	$(2s_f)^+ - 1$	m_{34}^-	$(2s_f)^-$	$(m_{34})^+ - 1$

a, b, α et β sont définis comme dans le cas général (tableau II_4)

TABLEAU II_7

CAS III : Réaction élastique

$m_1 = m_3$; $m_2 = m_4$ $(m_1 \neq m_2)$

$s_1 = s_3 = s$; $s_2 = s_4 = s'$ $\eta = +1$ $S = S_{12} = S_{34}$

$m = s + s' - \mathrm{Max}(|\lambda|, |\mu|)$

la fonction $\sqrt{s}^{|\lambda-\mu|} S^{2m} \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ est "régulière"

TABLEAU II_8

CAS V : Toutes les masses égales

$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$ $\eta = +1$

$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = \mathscr{s}$; $p = \frac{1}{2}\sqrt{s - 4m^2}$

$n = 2\mathscr{s} - \mathrm{Max}(|\lambda|, |\mu|)$

$\sum_i \lambda_i$ pair	$\sum_i \lambda_i$ impair
la fonction $p^{2n} \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ est "régulière"	la fonction $\frac{p^{2n}}{\sqrt{s}} \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ est "régulière"

TABLEAU II_{10}

CAS IV : $m_1 = m_2 = m$; $m_3 = m_4 = m'$; $m \neq m'$

$s_1 = s_2 = s_i$; $s_3 = s_4 = s_f$; $m_{12} = 2s_i - \mathrm{Max}\,(|\lambda|, |\mu|)$

$m_{34} = 2s_f - \mathrm{Max}\,(|\lambda|, |\mu|)$

$k = \frac{1}{2}\sqrt{s-4m^2}$ $\qquad$ $p = \frac{1}{2}\sqrt{s-4m'^2}$

Amplitudes "régulières"

$$F^1_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{\,a}\, k^b\, p^d \left(\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} + \eta_{34}\, \hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \right.$$

ou

$$\left. + \eta\eta_{12}\, \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2} \right)$$

$$F^2_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{s}^{\,\alpha}\, k^\beta\, p^\delta \left(\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} - \eta_{34}\, \hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \right.$$

ou

$$\left. - \eta\eta_{12}\, \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2} \right)$$

Spin et parité \ valeur des exposants		a	b	d	α	β	δ
$\sum_i \lambda_i$ pair	$\eta = +1$	0	m_{12}^-	m_{34}^-	0	$m_{12}^+ - 1$	$m_{34}^+ - 1$
	$\eta = -1$	-1	$m_{12}^+ - 1$	m_{34}^-	-1	m_{12}^-	$m_{34}^+ - 1$
$\sum_i \lambda_i$ impair	$\eta = +1$	-1	m_{12}^-	m_{34}^-	-1	$m_{12}^+ - 1$	$m_{34}^+ - 1$
	$\eta = -1$	0	$m_{12}^+ - 1$	m_{34}^-	0	m_{12}^-	$m_{34}^+ - 1$

TABLEAU II[9]

III - MATRICE DE CROISEMENT DES AMPLITUDES D'HELICITE A DEUX CORPS

Soit $M^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(s,t,u)$ l'amplitude d'hélicité pour la réaction $1 + 2 \to 3 + 4$ où la particule i a le spin s_i, l'impulsion p_i et l'hélicité λ_i. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, $M^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(s,t,u)$ s'exprime en fonction des amplitudes spinorielles $\mathcal{M}^{s}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_3p_4;p_1p_2)$. A partir des hypothèses faites sur les propriétés d'analyticité des amplitudes spinorielles, l'amplitude d'hélicité $M^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(s,t,u)$ est une fonction analytique des variables s,t et u dans un voisinage complexe S^{+} de la région physique de la voie s(5a). L'indice + (ou -) signifie que la région s réel supérieur au plus grand des deux seuils est atteinte à partir du demi-plan supérieur (ou inférieur). Considérons maintenant la réaction $\bar{4} + 2 \to 3 + \bar{1}$ où le symbole $\bar{i}$ désigne l'anti-particule de la particule i. Soit $M^{t}_{\lambda_3\lambda_1;\lambda_4\lambda_2}(s,t,u)$ l'amplitude d'hélicité de cette réaction. Elle s'exprime en fonction des amplitudes spinorielles $\mathcal{M}^{t}_{A_3A_1;A_4A_2}(q_3\ q_1;q_4\ q_2)$ où les q_i sont les quadri-impulsions. C'est une fonction analytique des variables s,t,u dans le domaine T^{+}. Le but de ce chapitre est de trouver une relation entre les amplitudes d'hélicité de la voie s, $(1 + 2 \to 3 + 4)$ et de la voie t, $(\bar{4} + 2 \to 3 + \bar{1})$. Pour cela nous devons : i) faire le prolongement analytique de l'amplitude $M^{t}_{\lambda_3\lambda_1;\lambda_4\lambda_2}(s,t,u)$ de la région T^{+} à la région S^{+} ;

ii) établir la relation entre l'amplitude $M^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(s,t,u)$ et le prolongement analytique de l'amplitude $M^{t}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(s,t,u)$.

1) Propriétés de croisement des amplitudes spinorielles

Les propriétés de croisement des amplitudes spinorielles lorsque les quatre particules sont sur leur couche de masse $(p_i^2 = m_i^2)$, ont été prouvées par J. Bros, H. Epstein et V. Glaser[5] dans le cadre de la théorie quantique

des champs (formalisme de $\mathcal{L}.\mathcal{S}.\mathcal{Z}$). La preuve est faite pour quatre particules de masses non nulles, à condition qu'il existe une masse minimum non nulle pour tous les états différents du vide. Rappelons brièvement leurs résultats :

a) Les amplitudes spinorielles $\mathcal{M}^{s}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_3p_4;p_1p_2)$ et $\mathcal{M}^{t}_{A_3A_4;A_1A_2}(q_3q_4;q_1q_2)$ sont les valeurs au bord d'une même fonction $\mathcal{M}_{A_3A_4;A_1A_2}(k_3k_4;k_1k_2)$ ayant un domaine d'analyticité Δ dans l'espace complexe des quadri-vecteurs k_i, restreint à $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$. Alors l'enveloppe d'holomorphie du domaine Δ contient toujours un ensemble ouvert connexe de la variété définie par les conditions de couche de masse $(k_i^2 = m_i^2)$, qui met en communication les régions physiques des deux réactions. En d'autres termes, l'amplitude spinorielle $\mathcal{M}^{t}_{A_3A_1;A_4A_2}(q_3q_1;q_4q_2)$ peut être prolongée analytiquement de la région physique de la voie t jusqu'au point $q_4 = -p_4$, $q_2 = p_2$, $q_3 = p_3$, $q_1 = -p_1$, où le point $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ appartient à la région physique de la voie s. Par ailleurs, on sait que $\mathcal{M}^{s}$ et le prolongement de $\mathcal{M}^{t}$ vérifient : $\mathcal{M}^{(s)}_{A_3A_4;A_1A_2}(p_3p_4;p_1p_2) = (-1)^{\sigma(P)}\ \mathcal{M}^{(t)}_{A_3A_1;A_4A_2}(p_3-p_1;-p_4\ p_2)$ (III.1)

où $\sigma(P)$ est la signature de la permutation des fermions induite par la permutation $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Un chemin de prolongement est explicitement défini par son image dans l'espace des invariants s,t et u, $(s + t + u = \sum_i m_i^2)$. On met en communication la région T^+ et la région U^- (voisinage $\mathrm{Im}\ u \leq o$ de la région physique de la voie u correspondant à la réaction $1 + \bar{4} \to 3 + \bar{2}$) par un domaine $\Omega^+_s(s_1)$ défini par l'ensemble de conditions :

$$\left\{ s_1 < 0 \ ;\ \mathrm{Im}t > 0 \ ;\ |t| > R(s_1) \ ;\ |s-s_1| < \varepsilon\ (s_1,t) \right\} .$$

Ensuite, le domaine $\Omega^-_t(t_1)$ défini par l'ensemble de conditions :

$$\left\{ t_1 < 0 \ ;\ \mathrm{Im}s > 0 \ ;\ |s| > R(t_1) \ ;\ |t-t_1| < \varepsilon(t_1,s) \right\} ,$$

met en communication la région U^- et la région S^+. On choisit un chemin C dans la réunion des domaines T^+, $\Omega_s^+(s_1)$, U^-, $\Omega_t^-(t_1)$ et S^+.

Tout chemin Γ dans l'espace des quadri-vecteurs q_i, $(q_i^2 = m_i^2)$, qui admet pour image un chemin C, peut alors être choisi pour effectuer le prolongement analytique de l'amplitude $M^t_{A_3A_1;A_4A_2}(q_3q_1;q_4q_2)$ d'un point $\{q_i\}$ de la région physique de la voie t jusqu'au point $\{-p_4p_2;p_3-p_1\}$.

2) Prolongement analytique des amplitudes d'hélicité

Le domaine d'analyticité des amplitudes d'hélicité $M^t_{\{\lambda\}}(s,t,u)$ est l'image dans les invariants s, t et u du domaine d'analyticité des amplitudes spinorielles $M^t_{\{A_i\}}(q_i)$, privée des ensembles $\Phi(s,t,u) = 0$, $T_{31} = 0$, $T_{42} = 0$. (T_{31} et T_{42} sont définis dans la voie t comme S_{34} et S_{12} dans la voie s, et correspondent aux seuils et pseudo-seuils de la voie t). D'après l'équation (II.6), l'amplitude d'hélicité $M^t_{\{\lambda\}}(s,t,u)$ s'écrit formellement :

$$M^{(t)}_{\{\lambda\}}(s,t,u) = \mathcal{D}(L_{31})^{\{A\}}_{\{\lambda\}} \; M^{(t)}_{\{A\}}(q_i) \quad , \qquad \text{(III.2)}$$

où la matrice $\mathcal{D}(L_{31})$ comprend les quatre transformations de Lorentz d'hélicité correspondant aux quatre particules dans la voie t.*

---

*Quand nous faisons le prolongement analytique en dehors de la région physique de la voie t, les tétrades d'hélicité deviennent complexes, de sorte que la transformation de Lorentz qui fait passer de la tétrade de référence à la tétrade d'hélicité n'est plus définie par le couple de matrices 2×2 $(L(p), L^\dagger(p))$ mais par le couple $(L(p), L'(p))$ où $L'(p) = L^\dagger(p^*)$. Comme seule la représentation (s,o) du groupe $SL(2,C) \otimes SL(2,C)$ intervient dans la définition des états, nous nous intéresserons uniquement à la matrice 2×2 $L(p)$, et à son prolongement analytique que nous continuerons par abus de langage à appeler transformation de Lorentz $L(p)$.

Pour faire le prolongement analytique de l'amplitude $M^t_{\{\lambda\}}$ de la région T^+ à la région S^+, nous devons montrer que le domaine d'analyticité de l'amplitude spinorielle $M^t_{\{A_i\}}$ qui met en communication les deux régions physiques, contient un domaine d'analyticité de la matrice $\mathcal{D}(L_{31})$.
Pour illustrer ce propos, considérons par exemple la matrice $D^s(L_{31}(1))$, définie dans la région physique de la voie t, où $L_{31}(1)$ est la transformation de Lorentz d'hélicité de la particule 1 donnée par :

$$L_{31} \begin{pmatrix} \overset{o}{t} \\ \overset{o}{n}_2 \\ \overset{o}{n}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1/m_1 \\ w^t \\ h_{31}(1) \end{pmatrix}$$

avec $\sqrt{\Phi}\, w^t_\mu = -2\, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, q_4^\nu\, q_2^\rho\, q_3^\sigma$ et $h_{31}(1) = -2\, \dfrac{m_1^2\, P_t - (q_1 . P_t)\, q_1}{m_1\, T_{31}}$

$$q_1 + q_3 = q_2 + q_4 = P_t \quad .$$

Ces quantités sont définies par analogie aux quantités correspondantes de la voie s. La transformation de Lorentz $L_{31}(1)$ est singulière là où les vecteurs de base de la tétrade d'hélicité sont eux-mêmes singuliers. Elle est donc singulière à $\Phi(s,t) = 0$ et $T_{31} = 0$. Donc la transformation $L_{31}(1)$ peut être prolongée le long de tout chemin qui évite ces singularités. Le résultat de ce prolongement analytique pour tous les chemins qui conduisent à une même détermination des fonctions T_{31} et $\sqrt{\Phi}$ sera le même, au signe près comme nous allons le voir maintenant. Naturellement le même argument est valable pour les trois autres transformations de Lorentz. Pour les bosons, une ambiguïté de signe n'a pas d'importance puisque l'on a la relation :

$$D^{s_i}(L_{31}(i)) = (-1)^{2s_i}\, D^{s_i}(-L_{31}(i)) \ .$$

Pour les fermions, par contre, une ambiguïté de signe sur la transformation $L_{31}(i)$ se retrouve exactement dans la matrice $D^{s_i}(L_{31}(i))$. La matrice 2×2 $L_{31}(i)$ peut s'écrire sous la forme :

$$L_{31}(i) = \frac{\sigma . Q_i}{\sqrt{Q_i^2}} \quad ,$$

où la quantité Q_i a des composantes singulières à $\Phi(s,t) = 0$, $T_{31} = 0$ ou $T_{42} = 0$. On voit donc apparaître dans cette expression de la matrice 2×2 $L_{31}(i)$ une singularité correspondant à l'équation $Q_i^2 = 0$, qui n'est pas une singularité des vecteurs de base de la tétrade d'hélicité. Cette équation $Q_i^2 = 0$ est une relation entre les composantes des quadrivecteurs q_i et ne peut pas être écrite en fonction des seuls invariants. Cette singularité supplémentaire est à l'origine d'une ambiguïté de signe. En d'autres termes, deux chemins Γ_1 et Γ_2 dans l'espace des quadrivecteurs , q_i ($q_i^2 = m_i^2$) , qui ont la même image C dans l'espace des invariants, mais qui aboutissent à deux valeurs opposées de la fonction $\sqrt{Q_i^2}$ ne sont pas équivalents pour la fonction $D^{s_i}(L_{31}(i))$. Cependant nous allons prouver le lemme suivant :

Lemme : Le prolongement analytique du produit tensoriel $L_{31}(i) \otimes L_{31}(j)$ où les indices i et j désignent deux particules quelconques, ne dépend que de l'image C d'un chemin Γ , et non de Γ lui-même.

Corollaire : Puisque le nombre de fermions de la réaction est toujours pair, tous les chemins Γ dans l'espace des quadrivecteurs qui admettent pour images dans l'espace des invariants un chemin fixé C , donneront la même détermination du produit $\prod_i D^{s_i}(L_{31}(i))$.

Preuve : Rappelons tout d'abord la définition de la matrice $L_{31}(i)$:

$$L_{31}(i) = B\left(\frac{P_t}{\sqrt{t}} \rightarrow \frac{q_i}{m_i}\right) \Omega_{31}\,(n_3(P_t) \rightarrow q(i))\,[P_t]\,\varepsilon' \qquad \text{(III.3)}$$

avec $q(i) = q_{42}$ si $i = 4$ ou 2 ; $q(i) = q_{31}$ si $i = 3$ ou 1

et $\varepsilon' = 1$ si $i = 4$ ou 3 ; $\varepsilon' = -i\sigma_2$ si $i = 2$ ou 1

Considérons maintenant l'expression $X_{ij} = L_{31}(i) \otimes L_{31}(j)$. Nous observons alors que : i) l'expression , X_{ij} est bilinéaire en $[P_t]$. Donc l'ambiguïté de signe ne provient pas du prolongement de la matrice $[P_t]$.

$$\text{ii)}\quad B\left(\frac{P_t}{\sqrt{t}} \to \frac{q_i}{m_i}\right) = \frac{m_i\sqrt{t} + \sigma q_i\,\sigma\tilde{P}_t}{\sqrt{2m_i\sqrt{t}\,(m_i\sqrt{t} + q_i P_t)}} \quad .$$

Les singularités de B peuvent donc être exprimées en fonction des invariants s et t seulement.

iii) On peut toujours choisir pour matrice $[P_t]$ une transformation de Lorentz qui fait passer du quadrivecteur $\overset{\circ}{n}_2$ au quadrivecteur w^t. La transformation de Lorentz Ω_{31} est alors une transformation dans le biplan orthogonal aux quadrivecteurs P_t et w^t, qui amène le quadrivecteur $n_3(P_t)$ sur le quadrivecteur $q(i)$. On en déduit la relation $\Omega_{31}(j) = K\,\Omega_{31}(i)$ où K est la transformation de Lorentz pure qui amène le quadrivecteur $q(i)$ sur le quadrivecteur $q(j)$. (La matrice K est en particulier l'unité si les deux particules i et j appartiennent à l'état initial ou à l'état final). Les singularités de la matrice K sont des fonctions des invariants s et t. Comme la matrice X_{ij} est linéaire dans la matrice K et bilinéaire dans la matrice $\Omega_{31}(i)$, une ambiguïté de signe correspondant au prolongement de la matrice $\Omega_{31}(i)$ n'apparaît pas dans la matrice X_{ij}.

En conclusion, si on choisit dans le domaine d'analyticité de Bros, Epstein et Glaser des valeurs suffisamment grandes de $R(s_1)$ et $R(t_1)$ pour que le chemin C évite toutes les singularités cinématiques, tout chemin Γ dans l'espace des quadrivecteurs q_i, ayant pour image C, est dans le domaine d'analyticité de la matrice $\mathcal{D}(L_{31})^{\{A\}}_{\{\lambda\}}$. Un choix explicite de chemin C sera fait dans le paragraphe III.3.A.

3) Matrice de croisement entre amplitudes d'hélicité

Ce prolongement analytique nous permet d'écrire formellement la relation :

$$M^{tc}_{\{\lambda\}} = \mathcal{D}(L^c_{3l})^{\{A\}}_{\{\lambda\}}\; M^{tc}_{\{A\}}\quad (q_i)\quad ,$$

où l'indice c se rapporte aux quantités "croisées", c'est-à-dire aux quantités qui ont été prolongées analytiquement de la région physique de la voie t à la région physique de la voie s .

Les propriétés de croisement (III.1) des amplitudes spinorielles conduisent alors directement à la relation de croisement :

$$M^{s}_{\{\lambda\}}(s,t,u) = (-1)^{\sigma(p)} \sum_{\{A\}} \mathcal{D}(L_{31}^{-1\,c})^{\{\lambda'\}}_{\{A\}}\, \mathcal{D}(L_{12})^{\{A\}}_{\{\lambda\}}\, M^{t\,c}_{\{\lambda'\}}(s,t,u) \qquad \text{(III.4)}$$

avec (voir section II.5)

$$\mathcal{D}(L_{31})^{\{A\}}_{\{\lambda'\}} = (-1)^{s_3+\lambda'_3+s_1+\lambda'_1} D^{s_1}(L_{31}(1))^{A_1}_{-\lambda'_1} D^{s_2}(L_{31}(2))^{A_2}_{\lambda'_2} D^{s_3}(L_{31}(3))^{A_3}_{-\lambda'_3}$$

$$\times D^{s_4}(L_{31}(4))^{A_4}_{\lambda'_4} \quad \text{et}$$

$$\mathcal{D}(L_{12})^{\{A\}}_{\{\lambda\}} = (-1)^{s_4+\lambda_4+s_3+\lambda_3} D^{s_1}(L_{12}(1))^{A_1}_{\lambda_1} D^{s_2}(L_{12}(2))^{A_2}_{\lambda_2} D^{s_3}(L_{12}(3))^{A_3}_{-\lambda_3}$$

$$\times D^{s_4}(L_{12}(4))^{A_4}_{-\lambda_4} \,.$$

La matrice de croisement entre amplitudes d'hélicité est donc :

$$Z^{\{\lambda'\}}_{\{\lambda\}} = (-1)^{\sigma(P)}\,(-1)^{\lambda'_3-\lambda_3+s_4+\lambda_4-s_1-\lambda'_1} D^{s_1}\left(L_{31}^{-1c}(1)\, L_{12}(1)\right)^{-\lambda'_1}_{\lambda_1} D^{s_2}\left(L_{31}^{-1c}(2)\, L_{12}(2)\right)^{\lambda'_2}_{\lambda_2}$$

$$\times D^{s_3}\left(L_{31}^{-1c}(3)\, L_{12}(3)\right)^{-\lambda'_3}_{-\lambda_3} D^{s_4}\left(L_{31}^{-1c}(4)\, L_{12}(4)\right)^{\lambda'_4}_{-\lambda_4} \,. \qquad \text{(III.5)}$$

On voit que le calcul explicite de la matrice Z se réduit au calcul du produit tensoriel $\prod_i^{\otimes} D^i(L_{31}^{-1c}(i)\, L_{12}(i))$. Nous allons maintenant montrer que la matrice

$L_{31}^{-1c}(i)\, L_{12}(i)$ peut être déterminée au signe près à partir de son action sur les quadrivecteurs de base de la tétrade d'hélicité de la particule i . Le signe global sera ensuite déterminé dans l'appendice A.II .

A - Détermination de la matrice $L_{31}^{-1c}(i)\, L_{12}(i)$ au signe près .

Pour compléter la définition des amplitudes d'hélicité en dehors des régions physiques, nous allons définir les fonctions analytiques de s ou t , S_{12} , S_{34} et T_{31} , T_{42} dans les divers plans coupés suivants :

i) Le plan de la variable t est coupé sur l'axe réel de la valeur $t_o = \text{Min}\{(m_3 - m_1)^2 , (m_2 - m_4)^2\}$ à la valeur $t_o' = \text{Max}\{(m_3 + m_1)^2, (m_4 + m_2)^2\}$.

Les fonctions analytiques T_{31} et T_{42} sont positives pour les grandes valeurs réelles positives de t .

ii) De manière analogue, le plan de la variable s est coupé sur l'axe réel, de la valeur $s_o = \text{Min}\{(m_1 - m_2)^2 , (m_3 - m_4)^2\}$,

à la valeur $s_o' = \text{Max}\{(m_1 + m_2)^2, (m_3 + m_4)^2\}$.

S_{12} et S_{34} sont positifs pour s réel grand > 0 .

iii) Le plan de la variable Φ est coupé le long de l'axe réel positif et la fonction $\sqrt{\Phi}$ a une détermination positive dans les régions physiques S^+ , T^+ et U^+ .

iv) Finalement, pour obtenir la valeur usuelle de l'angle de diffusion ($0 \leq \theta_s \leq \pi$) nous sommes amenés à définir la fonction $\sqrt{s}$ dans le plan s coupé le long de l'axe réel positif et à choisir la détermination positive dans la région S^+ c'est-à-dire au-dessus de la coupure. La relation $\sin\theta_s = \dfrac{2\sqrt{s}\,\sqrt{\Phi}}{S_{12}\, S_{34}}$

assure que la fonction $\sin\theta_s$ est alors positive dans la région physique S^+. La même définition de la fonction $\sqrt{t}$ ou $\sqrt{u}$ est adoptée dans le plan t ou le plan u.

Nous allons montrer l'existence d'un chemin C du domaine de Bros, Epstein et Glaser qui permet d'effectuer le prolongement analytique des amplitudes d'hélicité de la voie t. Les images de ce chemin dans les différents plans coupés s,t,u et Φ sont montrées dans les figures III_1 à III_4.

Soit ρ un nombre réel suffisamment grand. Le point de départ du chemin C est le point M_o défini dans la région T^+ par les équations :

$$t = 4\rho \quad ; \quad s = -2\rho \quad ; \quad u = \sum_i m_i^2 - 2\rho \ .$$

On passe du point M_o au point M_1, défini dans la région U^- par les équations

$$t = -2\rho \ , \quad s = -2\rho \ , \quad u = \sum_i m_i^2 + 4\rho \ ,$$

en décrivant un premier arc de courbe C_1 paramétrisé comme suit :

$$\begin{cases} t = \rho(1+3e^{i\varphi}) \\ s = -2\rho \\ u = \sum_i m_i^2 + \rho(1-3e^{i\varphi}) \end{cases}$$

où φ est un paramètre réel : $o \leq \varphi \leq \pi$

Enfin on passe du point M_1 au point M_2, défini dans la région S^+ par les équations

$$t = -2\rho \ , \quad s = 4\rho \ , \quad u = \sum_i m_i^2 - 2\rho \ ,$$

en décrivant un second arc de courbe C_2 paramétrisé comme suit :

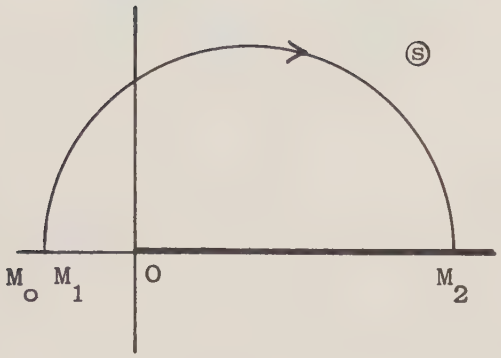

Figure III 1

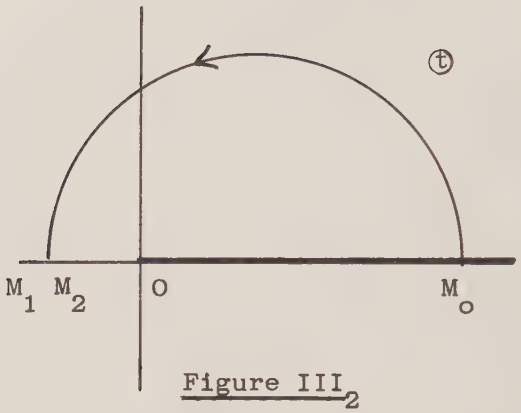

Figure III 2

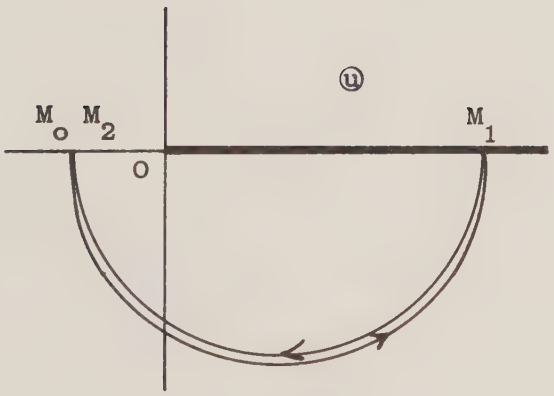

Figure III 3

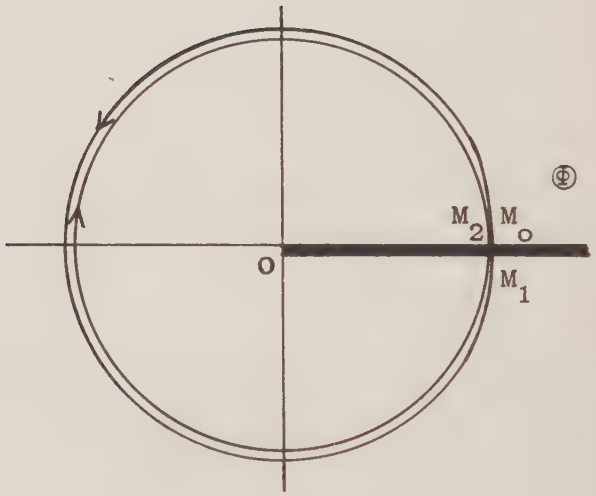

Figure III 4

$$\begin{cases} t = -2\rho \\ s = \rho(1-3e^{-i\varphi}) \\ u = \sum_i m_i^2 + \rho(1+3e^{-i\varphi}) \end{cases}$$

où φ est un paramètre réel : $0 \leq \varphi \leq \pi$

La fonction Φ est un polynôme du troisième degré dans les variables s,t et u qui peut être approximé pour les grandes valeurs du paramètre ρ par les deux fonctions $\Phi_1 = 2\rho^3 (9e^{2i\varphi} - 1)$ sur la courbe C_1 et $\Phi_2 = 2\rho^3 (9e^{-2i\varphi} - 1)$ sur la courbe C_2. En se rappelant que le paramètre φ varie de 0 à π, on voit que la valeur finale de la fonction $\sqrt{\Phi}$ est positive, ce qui était une des conditions que devait remplir le chemin C. De plus, puisque nous n'avons jamais traversé l'axe réel positif du plan s ou t, les fonctions S_{ij} et T_{ij} n'ont pas changé de détermination (voir fig. III_1 à III_4).

Examinons maintenant le prolongement analytique dans la région S^+ des tétrades d'hélicité de la voie t.

Le quadrivecteur $\frac{q_i}{m_i}$ se prolonge dans S^+ en le quadrivecteur $\frac{p_i}{m_i}$ pour les particules "non croisées" 2,3 et en le quadrivecteur $-\frac{p_i}{m_i}$ pour les particules "croisées" 1, 4. Le quadrivecteur w^t se prolonge analytiquement en le quadrivecteur -w. En effet, la fonction $\sqrt{\Phi}$ a une valeur finale positive et de plus, nous avons la relation :

$$(\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\ q_4^\nu\ q_2^\rho\ q_3^\sigma)^c = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_1^\nu\ p_2^\rho\ p_3^\sigma .$$

Le quadrivecteur d'hélicité $h_{31}(i)$ se prolonge en le quadrivecteur $h_{31}^c(i)$ défini par :

$$h_{31}^c(i) = -2\,\frac{m_i^2\,(p_3 - p_1) - (p_f(p_3 - p_1))\,p_i}{m_i\,T(i)}$$

où la fonction T(i) est le prolongement analytique de la fonction T_{31} si $i = 3,1$,

ou de la fonction T_{42} si $i = 4,2$. Le prolongement analytique de la matrice 2×2 $L_{31}(i)$ est ainsi défini à un signe près.

a) Cas des particules "croisées" ($i = 4$ ou 1)

Considérons la transformation de Lorentz $\mathcal{L}(i) = L_{31}^{c-1}(i)\, L_{12}(i)$. Son action sur la tétrade de référence s'écrit :

$$\mathcal{L}(i) \begin{pmatrix} \overset{o}{t} \\ \overset{o}{n}_1 \\ \overset{o}{n}_2 \\ \overset{o}{n}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{o}{-t} \\ n_1'(i) \\ -\overset{o}{n}_2 \\ n_3'(i) \end{pmatrix}$$

où, par définition, le quadrivecteur $n_1'(i)$ (ou $n_3'(i)$) est le transformé du quadrivecteur $\overset{o}{n}_1$ (ou $\overset{o}{n}_3$) . Nous remarquons que la transformation de Lorentz $\mathcal{L}(i)$ renverse l'axe des temps du référentiel du laboratoire, si bien que l'on a besoin de deux matrices 2 × 2 unimodulaires pour spécifier cette transformation de Lorentz complexe . (Voir la note de la page 53) . Soit $\mathcal{L}'(i)$ la matrice 2 × 2 qui accompagne la matrice 2 × 2 dans la définition de la transformation de Lorentz complexe $(\mathcal{L}(i), \mathcal{L}'(i))$. Il est facile de voir que la transformation de Lorentz définie par le couple de matrices 2 × 2 unimodulaires $(\mathcal{L}(i), -\mathcal{L}'(i))$ laisse l'axe des temps invariant. L'inversion d'espace et de temps P T est représentée par l'un des couples $(\mathbb{1}, -\mathbb{1})$ ou $(-\mathbb{1}, \mathbb{1})$. De plus, elle laisse aussi invariant l'axe 2 du système de référence et transforme le quadrivecteur $\overset{o}{n}_1$ (ou $\overset{o}{n}_3$) en le quadrivecteur $-n_1'(i)$ (ou $-n_3'(i)$) . Cette transformation de Lorentz est donc une rotation autour de l'axe 2 du système de référence. La matrice 2 × 2 $\mathcal{L}(i) = -[\mathcal{L}'(i)]^{-1}$ qui lui correspond peut s'écrire au signe près sous la forme :

$$\alpha_i = \left(\cos\frac{\chi_i'}{2} - i\sigma_2 \sin\frac{\chi_i'}{2} \right) , \qquad \text{(III.6-a)}$$

où χ'_i est l'angle de la rotation et sera calculé dans la section suivante .

b) Cas des particules "non croisées" (i = 2 ou 3)

La transformation de Lorentz $\mathcal{L}(i) = L_{31}^{c-1}(i)\, L_{12}(i)$ est maintenant une rotation. En effet, son action sur la tétrade de référence s'écrit :

$$\mathcal{L}(i) \begin{Bmatrix} \overset{o}{t} \\ \overset{o}{n}_1 \\ \overset{o}{n}_2 \\ \overset{o}{n}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overset{o}{t} \\ n'_1(i) \\ -\overset{o}{n}_2 \\ n'_3(i) \end{Bmatrix}$$

Elle renverse l'axe 2 de la tétrade de référence. On peut donc la décomposer en le produit d'une rotation $R_3(\pi)$ d'angle π autour de l'axe 3 de la tétrade de référence et d'une rotation d'angle χ'_i autour de l'axe 2 de la tétrade de référence. Autrement dit, au signe près la matrice 2 x 2 $\mathcal{L}(i)$ peut s'écrire :

$$\alpha_i = -i\sigma_3 \left(\cos\frac{\chi'_i}{2} - i\sigma_2 \sin\frac{\chi'_i}{2} \right) . \qquad \text{(III.6-b)}$$

B - Détermination des angles de rotation χ'_i

L'angle χ'_i , $(-\pi \leq \chi'_i \leq \pi)$, peut être déterminé par la connaissance de ses lignes trigonométriques :

$$\begin{cases} \cos \chi'_i = -\overset{o}{n}_3 . (R(i)\, \overset{o}{n}_3) \\ \sin \chi'_i = -\overset{o}{n}_1 . (R(i)\, \overset{o}{n}_3) = \overset{o}{n}_3 . (R(i)\, \overset{o}{n}_1) \end{cases}$$

puisque χ_i' est l'angle dont a tourné le vecteur $\overset{\rightarrow}{\overset{o}{n}}_3$ autour de l'axe 2 dans la rotation R(i) :

où $\begin{cases} R(i) = L_{31}^{-1c}(i)\, L_{12}(i)\, P\, T \quad \text{pour} \quad i = 1,4 \\ R(i) = R_3^{-1}(\pi)\, L_{31}^{-1c}(i)\, L_{12}(i) \quad \text{pour} \quad i = 2,3 \end{cases}$

a) Calcul de cos χ_i'

On remarque que, par définition des quadrivecteurs d'hélicité $h_{12}(i)$ et $h_{31}(i)$,

$$\begin{cases} L_{12}(i)\, \overset{o}{n}_3 = h_{12}(i) \\ L_{31}^{c}(i)\, \overset{o}{n}_3 = h_{31}^{c}(i) \end{cases}$$

Donc $\cos \chi_i' = \varepsilon_i\, h_{31}^{c}(i)\, h_{12}(i)$ où $\varepsilon_i = +1$ pour $i = 4,1$ et $\varepsilon_i = -1$ pour $i = 3,2$

Tous calculs faits, on obtient :

$$S_{12}T_{31}\cos\chi_1' = (s+m_1^2-m_2^2)(t+m_1^2-m_3^2)+2m_1^2\Delta \; ; \; S_{12}T_{42}\cos\chi_2' = (s+m_2^2-m_1^2)(t+m_2^2-m_4^2)-2m_2^2\,\Delta$$

$$S_{34}T_{31}\cos\chi_3' = (s+m_3^2-m_4^2)(t+m_3^2-m_1^2)-2m_3^2\,\Delta \; ; \; S_{34}T_{42}\cos\chi_4' = (s+m_4^2-m_3^2)(t+m_4^2-m_2^2)+2m_4^2\,\Delta$$

avec $\Delta = m_2^2 + m_3^2 - m_1^2 - m_4^2$.

b) Calcul de sin χ_i'

Par définition de la rotation R(i) nous avons la relation :

$$\sin \chi_i' = \overset{o}{n}_1 \; (L_{31}^{c-1}(i)\; L_{12}(i)\; \overset{o}{n}_3) \quad ,$$

c'est-à-dire $\sin \chi_i' = n_1^c(i)\; h_{12}(i)$ où le quadrivecteur $n_1^c(i)$ est le prolongement analytique de l'axe $n_1^t(i)$ de la tétrade d'hélicité de la particule i dans la voie t :

$$n_{1\mu}^t(i) = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (w^t)^\nu\, h_{31}^\rho(i)\; \frac{q_i^\sigma}{m_i} \quad .$$

Pour la particule 1 par exemple l'axe $n_1^t(1)$ a pour composantes :

$$n_{1\mu}^t(1) = -\frac{2}{T_{31}}\; \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (w^t)^\nu\, q_3^\rho\, q_1^\sigma \quad .$$

Son prolongement analytique $n_1^c(1)$ a donc pour composantes :

$$n_{1\mu}^c(1) = -\frac{2}{T_{31}}\; \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\; w^\nu\; p_3^\rho\; p_1^\sigma \quad .$$

Tout calcul fait on obtient :

$$S_{12}T_{31} \sin \chi_1' = -2m_1\sqrt{\Phi} \qquad S_{12}T_{42} \sin \chi_2' = -2m_2\sqrt{\Phi}$$

$$S_{34}T_{31} \sin \chi_3' = 2m_3\sqrt{\Phi} \qquad S_{34}T_{42} \sin \chi_4' = 2m_4\sqrt{\Phi} \quad .$$

c) Matrice de croisement des amplitudes d'hélicité

Les angles χ_i' permettent de déterminer la matrice de croisement

$$M^{(s)}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(s,t,u) = (-)^{\sigma(P)+2s_2+2s_4}\, e^{i\pi(\lambda_2-\lambda_3)} \sum_{\lambda_i'} d^{s_1}(\chi_1)^{\lambda_1'}_{\lambda_1}\, d^{s_2}(\chi_2)^{\lambda_2'}_{\lambda_2}\, d^{s_3}(\chi_3)^{\lambda_3'}_{\lambda_3} \times d^{s_4}(\chi_4)^{\lambda_4'}_{\lambda_4}\, M^{(t)}_{\lambda_3'\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2'}(s,t,u)$$

et $\sigma(P) = 1$ si les particules 1 et 4 sont des fermions

$\sigma(P) = 0$ dans tous les autres cas.

$$\cos\chi_1 = -\frac{(s+m_1^2-m_2^2)(t+m_1^2-m_3^2)+2m_1^2\,\Delta}{S_{12}\,T_{31}} \qquad \sin\chi_1 = \frac{2m_1\sqrt{\Phi}}{S_{12}T_{31}}$$

$$\cos\chi_2 = \frac{(s+m_2^2-m_1^2)(t+m_2^2-m_4^2)-2m_2^2\,\Delta}{S_{12}\,T_{42}} \qquad \sin\chi_2 = \frac{2m_2\sqrt{\Phi}}{S_{12}T_{42}}$$

$$\cos\chi_3 = \frac{(s+m_3^2-m_4^2)(t+m_3^2-m_1^2)-2m_3^2\,\Delta}{S_{34}\,T_{31}} \qquad \sin\chi_3 = -\frac{2m_3\sqrt{\Phi}}{S_{34}T_{31}}$$

$$\cos\chi_4 = -\frac{(s+m_4^2-m_3^2)(t+m_4^2-m_2^2)+2m_4^2\,\Delta}{S_{34}\,T_{42}} \qquad \sin\chi_4 = -\frac{2m_4\sqrt{\Phi}}{S_{34}T_{42}}$$

$$\Delta = m_2^2 + m_3^2 - m_4^2 - m_1^2$$

TABLEAU III$_1$

Matrice de croisement entre amplitudes d'hélicité.

entre amplitudes d'hélicité à un signe global près η^s indépendant des hélicités . En tenant compte des rotations $R_3(\pi)$ d'angle π autour de l'axe 3 de la tétrade de référence, le croisement s'écrit :

$$M^s_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(s,t,u) = \eta^s(-1)^{\sigma(P)}\, e^{-i\pi(\lambda_2-\lambda_3)} \sum_{\{\lambda_i'\}} (-1)^{\lambda_3-\lambda_3'+s_4+\lambda_4-s_1-\lambda_1'} \tag{III.7}$$

$$d^{s_1}(\chi_1')^{-\lambda_1'}_{\lambda_1}\, d^{s_2}(\chi_2')^{\lambda_2'}_{\lambda_2}\, d^{s_3}(\chi_3')^{-\lambda_3'}_{-\lambda_3}\, d^{s_4}(\chi_4')^{\lambda_4'}_{-\lambda_4}\, M^t_{\lambda_3'\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2'}(s,t,u)$$

Il est pratique de définir de nouveaux angles χ_i pour pouvoir écrire chaque élément de la matrice de croisement sous la forme d'un produit $\prod_i d^{s_i}(\chi_i)^{+\lambda_i'}_{+\lambda_i}$.

On utilise les identités suivantes : $d^s(\chi' \pm \pi)^{\lambda'}_{\lambda} = (-1)^{s\pm\lambda'}\, d^s(\chi')^{-\lambda'}_{\lambda}$

et $d^s(\chi')^{\lambda'}_{\lambda} = (-1)^{\lambda'-\lambda}\, d^s(-\chi')^{\lambda'}_{\lambda} = (-1)^{\lambda-\lambda}\, d^s(\chi')^{-\lambda}_{-}$

De plus nous prouvons dans l'appendice A.II que la phase η_s vaut $(-1)^{2(s_2+s_4)}$, si bien que nous obtenons le résultat final donné dans le tableau III_1 . Le croisement est vérifié dans le cas de la réaction π-N élastique dans l'appendice A.V .

4) Matrice de croisement entre amplitudes d'hélicité "régularisées"

Les amplitudes $M^s_{\{\lambda\}}$ et $M^t_{\{\lambda\}}$ s'expriment en fonction des amplitudes d'hélicité "régularisées" $\mathcal{F}^{(s)}$ de la voie s et $\mathcal{F}^{(t)}$ de la voie t (voir chapitre II) . On déduit facilement la matrice de croisement entre amplitudes d'hélicité "régularisées" à partir de la formule de croisement du tableau III_1 . Dans une notation condensée, la nouvelle relation de croisement

s'écrit :

$$\mathcal{F}^{s}_{\{\lambda\}} = X^{\{\lambda'\}}_{\{\lambda\}} \; \mathcal{F}^{t}_{\{\lambda'\}} \quad , \tag{III.8}$$

où la matrice de croisement X possède les propriétés suivantes :

a) La matrice X est uniforme (à l'exception de la singularité $\sqrt{s}$ (ou $\sqrt{t}$) si la voie s (ou t) correspond à un état boson-fermion). En effet, par définition, les amplitudes $\mathcal{F}^{s}$ et $\mathcal{F}^{t}$ sont "uniformes" . La vérification de cette propriété fait l'objet de l'appendice A.III .

b) La matrice X est de plus une fonction rationnelle de s et t . En effet, la matrice X est uniforme et peut être exprimée en termes de fonctions algébriques. Nous écrirons alors :

$$X^{\{\lambda'\}}_{\{\lambda\}} = \frac{P}{Q}$$

où P et Q sont des polynômes en s et t , avec l'exception usuelle dans les cas boson-fermion.

c) Les fonctions $\mathcal{F}^{s}_{\{\lambda\}}$ étant "régulières" , les zéros des polynômes Q doivent être exactement compensés par des zéros de certaines combinaisons linéaires des fonctions $\mathcal{F}^{t}_{\{\lambda'\}}$. L'étude des relations obtenues pour certaines valeurs de t entre les fonctions $\mathcal{F}^{t}_{\{\lambda'\}}$ fait l'objet du chapitre suivant.

IV - CONTRAINTES CINEMATIQUES

1) Principe de la méthode

Dans cette section, nous allons généraliser à des cas de spin et de masses arbitraires les relations qui existent entre les amplitudes d'hélicité "régularisées", pour certaines valeurs de l'énergie, dans les réactions $\pi N \to \pi N$ [16] , $\pi\pi \to N\bar{N}$ [16] , et $N\bar{N} \to N\bar{N}$ [17] . Nous appellerons de telles relations contraintes cinématiques.

Rappelons comment apparaît la contrainte dans le cas de la diffusion $\pi\pi \to N\bar{N}$. Si on exprime les amplitudes invariantes A et B en fonction des amplitudes d'hélicité "régularisées" (voir appendice A.V) , on trouve :

$$\begin{cases} A(s,t,u) = \dfrac{m_N}{p^2} \left[F^1_{++} + m_N F^2_{+-} \dfrac{(t-u)}{2} \right] \\ B(s,t,u) = -2m_N F^2_{+-} \end{cases} \qquad \text{(IV.1)}$$

On voit qu'un pôle cinématique apparaît à $p^2 = 0$ (soit pour $s = 4m_N^2$) dans l'expression de l'amplitude $A(s,t,u)$ à moins que le résidus de ce pôle ne soit nul. Ecrire la contrainte cinématique revient à annuler le résidus de ce pôle à $s = 4m_N^2$.*

---

* Si on ne désire pas faire d'hypothèse sur le comportement de $A(s,t,u)$ à $s = 4m_N^2$, on peut dire que la combinaison linéaire des amplitudes d'hélicité "régularisées" peut être divisée par le terme $s - 4m_N^2$ sans qu'on perde ses propriétés d'analyticité.

Des résultats analogues sont obtenus dans le cas de la diffusion élastique πN ou $N\bar{N}$ en exprimant les amplitudes invariantes (A et B pour la réaction πN élastique ou S,V,T,A,P pour la réaction $N\bar{N}$ élastique) en fonction des amplitudes d'hélicité "régularisées".

Une telle méthode ne peut pas malheureusement se généraliser pour des cas de spin plus élevés pour deux raisons. La première est qu'on ne sait pas encore inverser les développements du type II.7 , c'est-à-dire exprimer les amplitudes de Joos $a_{\ell_1 \ell_2}(s,t)$ en fonction des amplitudes d'hélicité. La seconde est que la conservation de la parité est difficile à exprimer sur ces amplitudes invariantes $a_{\ell_1 \ell_2}(s,t,u)$. La méthode que nous proposons utilise de façon intensive les propriétés d'analyticité des éléments de la matrice de croisement exprimant les amplitudes "régularisées" de la voie t en fonction de celles de la voie s . Ces éléments de matrice sont des fonctions méromorphes. En effet ils ont des pôles à $S_{12}^2 = 0$ (ou $S_{34}^2=0$)d'ordre $\frac{(2s_1+2s_2)}{2}^{\pm}$ $\left($ou $\frac{(2s_3+2s_4)}{2}^{\pm}\right.$

Ils ont également des pôles à $s = 0$ (ou un point de branchement du type $\sqrt{s}$ dans le cas $BF \to BF$) . Mais la présence de ces pôles est due uniquement à la régularisation. Supprimer ces pôles ne fournira pas d'informations supplémentaires par rapport au contenu des équations II.23,24 qui expriment que les amplitudes d'hélicité sont "régulières" à $s = 0$. Enfin on vérifie qu'en dépit de la présence des termes $\sin\frac{\theta_t}{2}^{|\lambda'-\mu'|}$ et $\cos\frac{\theta_t}{2}^{|\lambda'+\mu'|}$ au dénominateur de tous les éléments de la matrice de croisement, ceux-ci sont finis à la frontière de la région physique ($\Phi(s,t) = 0$) sauf dans le cas particulier correspondant à $m_1 = m_2$ et $m_3 = m_4$ où les deux variables de pseudoseuils $\Psi_{12} = \Psi_{34} = \sqrt{s}$ et le polynôme $\Phi(s,t)$ qui définit la frontière de la région physique s'annulent simultanément à $s = 0$ (Appendice A.IV) . Dans le cas général de masses les seuls pôles intéressants sont donc les pôles à $S_{12}^2 = 0$ et $S_{34}^2 = 0$. On pourrait penser que la compensation de ces pôles par des zéros de chaque

amplitude d'hélicité "régularisée" fournit une généralisation des contraintes cinématiques. Mais on ne tiendrait pas compte par exemple du fait que les matrices $d^{s_i}(\chi_i)$ ont un déterminant unité même si chaque élément a un pôle. Un tel argument, appliqué au cas $\pi\pi \to N\bar{N}$, aurait pour conséquence l'annulation de F^1_{++} et F^2_{+-} à $s = 4m_N^2$ ce qui n'est pas le résultat attendu.

Une méthode plus directe consiste à diagonaliser la matrice de croisement entre les amplitudes d'hélicité. Ceci a déjà été fait par Kotanski[9]. La normale au plan de production étant la même dans la voie s et dans la voie t , la matrice de croisement sera diagonale si cette normale est choisie comme axe de quantification du spin. Les amplitudes correspondantes ont été baptisées par Kotanski amplitudes de transversité. Les résidus des pôles de cette matrice de croisement devront s'annuler. Les contraintes cinématiques s'en déduiront facilement.

2) Contraintes cinématiques dans le cas général de masses

A - Amplitudes de transversité

Rappelons brièvement les propriétés des amplitudes de transversité. La transversité τ_i de la particule i est, par définition, la valeur propre de l'opérateur $-\frac{1}{m_i} w_\mu W^\mu(p_i)$,

où $w_\mu = -\frac{2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_1^\nu p_2^\rho p_3^\sigma}{\sqrt{\Phi(s,t)}}$ (composantes de la normale au plan de production)

et $W(p_i)$ est le quadrivecteur polarisation de la particule i . La tétrade d'hélicité de la particule i est définie par les quatre quadrivecteurs : p_i , $n_1(p_i)$, $n_2(p_i) = w$, $n_3(p_i) = h_{12}(i)$. La tétrade de transversité est définie par Kotanski par les quatre quadrivecteurs : p_i , $n_1(p_i)$, $n_2(p_i) = -h_{12}(i)$ et $n_3(p_i) = w$ .Si bien que les états de transversité se déduisent simplement des états d'hélicité par la rotation R de $\frac{-\pi}{2}$ autour de Ox :

$|p_i, L_t(p_i), s_i, \tau_i\rangle = D^{s_i}(R)^{\lambda_i}_{\tau_i} |p_i, L_h(p_i), s_i, \lambda_i\rangle$. Kotanski a donné dans la référence [9] les propriétés des matrices $D^s(R)$. Nous rappelons un résultat :

Les matrices $D^s(R)$ diagonalisent les matrices $d^s(\chi)$

$$\left\{ \begin{array}{l} [D^s(R)\, d^s(\chi)\, D^s(R^*)]^{\lambda}_{\tau} = e^{i\chi\tau}\, \delta^{\lambda}_{\tau} \\ \text{ou} \qquad [D^s(R^*)\, d^s(\chi)\, D^s(R)]^{\lambda}_{\tau} = e^{-i\chi\tau}\, \delta^{\lambda}_{\tau} \end{array} \right. \qquad \text{(IV.2)}$$

Les amplitudes de transversité s'expriment alors simplement en fonction des amplitudes d'hélicité à l'aide d'une matrice numérique :

$$T_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(s,t,u) = D^{s_1}(R)^{\lambda_1}_{\tau_1}\, D^{s_2}(R)^{\lambda_2}_{\tau_2}\, D^{s_3}(R^*)^{\lambda_3}_{\tau_3}\, D^{s_4}(R^*)^{\lambda_4}_{\tau_4}\, M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(s,t,u) \qquad \text{(IV.3)}$$

Les principales propriétés des amplitudes de transversité sont :

a) Invariance par parité .

Nous connaissons (équation II.6) , les conditions d'invariance par parité pour les amplitudes d'hélicité. Ces conditions, pour les amplitudes de transversité, se déduisent facilement de (IV.3) , en remarquant que

$$(-1)^{s+\lambda} D^s(R)^{\lambda}_{\tau} = e^{i\pi\tau} D^s(R)^{-\lambda}_{\tau} \quad ; \qquad \text{(IV.4)}$$

on obtient : $$T_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2} = \eta(-i)^{\tau_1+\tau_2-\tau_3-\tau_4} T_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2} \; . \qquad \text{(IV.5)}$$

En d'autres termes $T_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2} = 0$ pour $\eta(-1)^{\tau_1+\tau_2-\tau_3-\tau_4} = -1$ si la parité est conservée dans la réaction.

b) Matrice de croisement

A partir du croisement entre les amplitudes d'hélicité de la voie s et de la voie t (tableau III_1) et des relations (IV.3) entre amplitudes d'hélicité et amplitudes de transversité, on déduit facilement la matrice de croisement entre les amplitudes de transversité de la voie s et de la voie t :

$$T^t_{-\tau_3-\tau_1;-\tau_4-\tau_2}(s,t) = (-)^{\sigma(P)}(-1)^{s_1+s_2+s_3+s_4} e^{-i\pi(\tau_2-\tau_3)} e^{i(\tau_1\chi_1-\tau_2\chi_2+\tau_3\chi_3-\tau_4\chi_4)} \times T^s_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(s,t) , \qquad \text{(IV.6)}$$

où les lignes trigonométriques des angles χ_i sont définies dans le tableau III_1.

B - Relations entre les amplitudes de transversité et les amplitudes d'hélicité "régularisées"

Nous allons montrer que le croisement entre les amplitudes de transversité permet de déduire leurs comportements au voisinage d'une singularité, ce qui détermine la contrainte correspondante entre les amplitudes d'hélicité "régularisées". Pour cela il faut savoir comment les amplitudes de transversité sont reliées aux amplitudes d'hélicité "régularisées" au voisinage de toutes les singularités.

a) Voisinage de $s = 0$. L'étude générale de la section II a montré que les amplitudes d'hélicité sont "régulières" à $s = 0$.

Puisque les amplitudes de transversité en sont des combinaisons linéaires à coefficients numériques, elles sont "régulières" à $s = 0$.

b) Voisinage de $S_{12} = 0$ et $S_{34} = 0$. La régularisation des amplitudes d'hélicité $M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ (éqs.II.12 à II.15) et la remarque IV.4 nous permettent de connaître la relation entre les deux déterminations d'une amplitude de transversité au voisinage des différents seuils et pseudo-seuils de la réaction :

$$T^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(-\varphi_{12}) = e^{\pm i\pi(\tau_1+\tau_2)}\, T^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(\varphi_{12})$$

$$\text{si} \quad \theta_s(-\varphi_{12}) = \theta_s(\varphi_{12}) \pm \pi$$

$$T^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(-\Psi_{12}) = e^{\pm i\pi(\tau_1-\tau_2)\varepsilon_{12}}\, T^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(\Psi_{12})$$

$$\text{si} \quad \theta_s(-\Psi_{12}) = \theta_s(\Psi_{12}) \pm \pi \qquad \text{(IV.7)}$$

$$T^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(-\varphi_{34}) = e^{\pm i\pi(\tau_3+\tau_4)}\, T^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(\varphi_{34})$$

$$\text{si} \quad \theta_s(-\varphi_{34}) = \theta_s(\varphi_{34}) \pm \pi$$

$$T^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(-\Psi_{34}) = e^{\pm i\pi(\tau_3-\tau_4)\varepsilon_{34}}\, T^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(\Psi_{34}) \,.$$

$$\text{si} \quad \theta_s(-\Psi_{34}) = \theta_s(\Psi_{34}) \pm \pi$$

Le comportement des amplitudes de transversité au voisinage des différents seuils et pesudo-seuils de la réaction se déduit du comportement correspondant des amplitudes d'hélicité (voir équation II.19 et II.20) :

On trouve que la fonction $S_{12}^{s_1+s_2}\ S_{34}^{s_3+s_4}\ T^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(s,t)$ est "finie" à $S_{12}=0$ et à $S_{34}=0$. Par commodité nous appelerons cette fonction $\tilde{T}^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(s,t)$.

$$\tilde{T}^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(s,t) = S_{12}^{s_1+s_2}\ S_{34}^{s_3+s_4}\ T^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2} \quad . \qquad \text{(IV.8)}$$

De plus, les coefficients du développement de $\tilde{T}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(s,t)$ en fonction des amplitudes d'hélicité "régularisées" ne sont pas tous nuls à $S_{12}=0$ et $S_{34}=0$.

c) <u>Voisinage de $\Phi(s,t)=0$</u>. La régularisation des amplitudes d'hélicité à $\Phi(s,t)=0$ permet d'écrire (II.12)

$$M^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sin\frac{\theta_s}{2}^{|\lambda-\mu|}\ \cos\frac{\theta_s}{2}^{|\lambda+\mu|}\ \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \ ,$$

où la fonction $\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ est "régulière" à $\Phi(s,t)=0$.

A partir de la définition des amplitudes de transversité en fonction des amplitudes d'hélicité (IV.3), on peut déduire la relation entre les deux déterminations de $T^{s}_{\{\tau\}}$ au voisinage de $\Phi(s,t)=0$ en se servant d'une propriété simple des matrices $D^{s}(R)$:

$$D^{s}(R)^{\lambda}_{\ \tau} = e^{i\pi\tau}(-1)^{s+\lambda}\ D^{s}(R)^{\lambda}_{\ -\tau} \quad .$$

Le résultat obtenu est le suivant :

$$T^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(-\sqrt{\Phi}) = (-1)^{s_1-s_2+s_4-s_3}(-1)^{\tau_1+\tau_2-\tau_3-\tau_4}\ T^{s}_{-\tau_3-\tau_4;-\tau_1-\tau_2}(\sqrt{\Phi})$$

$$\text{si} \quad \theta_s(-\sqrt{\Phi}) = -\theta_s(\sqrt{\Phi}) \qquad \text{(IV.9)}$$

et :

$$T^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(-\sqrt{\Phi}) = (-1)^{s_1-s_2-s_4+s_3}(-1)^{\tau_1+\tau_2-\tau_3-\tau_4}\, T^{s}_{-\tau_3-\tau_4;-\tau_1-\tau_2}(\sqrt{\Phi}) \qquad \text{(IV.10)}$$

$$\text{si} \quad \theta_s(-\sqrt{\Phi}) = 2\pi - \theta_s(\sqrt{\Phi}) \quad .$$

Remarques : i) La phase intervenant dans l'équation IV.9 diffère de celle de l'équation IV.10 par le facteur $(-1)^{2s_3+2s_4}$ qui vaut -1 dans le cas d'une réaction Boson-Fermion et 1 dans tous les autres cas.

ii) Ces résultats ne sont pas inattendus. En effet le quadrivecteur w qui sert à définir la transversité est singulier à $\Phi(s,t) = 0$ comme $\sqrt{\Phi}$. Si on change de détermination pour la fonction $\sqrt{\Phi}$, la transversité τ_i change de signe ce qui explique les relations IV.9 et IV.10 . Par contre ce sont les axes 2 des amplitudes de transversité qui sont singuliers à $S_{12} = 0$ ou $S_{34} = 0$. Si on change de détermination pour la fonction S_{12} ou S_{34} , on obtient la même amplitude à une phase près. C'est bien ce que montrent les équations IV.7 .

C - Contraintes cinématiques dans le cas général de masses

L'amplitude de transversité de la voie t , $T^{t}_{-\tau_3,-\tau_1;-\tau_4,-\tau_2}$, est "régulière" à $S_{12} = 0$ et $S_{34} = 0$. On voit donc d'après la formule de croisement (IV.6) que le comportement de l'amplitude de transversité de la voie s $T^{s}_{\tau_3\tau_1;\tau_4\tau_2}$ doit compenser exactement toutes les singularités de l'élément de matrice de croisement à $S_{12} = 0$ et à $S_{34} = 0$, c'est-à-dire qu'au voisinage de $S_{12} = 0$ ou $S_{34} = 0$, l'amplitude $T^{s}_{\tau_3\tau_1;\tau_4\tau_2}$ doit se comporter comme la fonction $e^{-i(\tau_1\chi_1-\tau_2\chi_2+\tau_3\chi_3-\tau_4\chi_4)}$ qu'il est utile, pour distinguer

les comportements aux seuils et aux pseudo-seuils, d'écrire sous la forme :

$$e^{-i\left\{(\chi_1+\chi_2)\frac{(\tau_1-\tau_2)}{2}+(\chi_1-\chi_2)\frac{(\tau_1+\tau_2)}{2}+(\chi_3-\chi_4)\frac{(\tau_3+\tau_4)}{2}+(\chi_3+\chi_4)\frac{(\tau_3-\tau_4)}{2}\right\}}$$

Etudions donc le comportement de la fonction $e^{i(\chi_1 \pm \chi_2)}$ au voisinage de $S_{12} = 0$. Nous montrons dans un appendice (A.III. § I.1) que $\cos(\chi_i \pm \chi_2)$ et $\sin(\chi_1 \pm \chi_2)$ se comportent au voisinage de $S_{12} = 0$ comme $\frac{1}{s-(m_1 \mp m_2)^2}$. Donc $e^{i(\chi_1 \pm \chi_2)}$ aura soit un pôle soit un zéro à $s = (m_1 \mp m_2)^2$ (si $e^{i(\chi_i+\chi_j)}$ a un pôle, alors $e^{-i(\chi_i+\chi_j)}$ a un zéro et vice versa). L'existence d'un pôle ou d'un zéro est liée à la détermination de la fonction $\sqrt{\Phi(s,t)}$ qui apparaît dans la définition du $\sin \chi_i$. Un raisonnement calqué sur le précédent nous montre que $e^{i(\chi_3 \pm \chi_4)}$ a un pôle ou un zéro à $s = (m_3 \mp m_4)^2$ suivant la détermination de $\sqrt{\Phi(s,t)}$. Par ailleurs $e^{2i\theta_s}$ est aussi une fonction qui a un pôle ou un zéro à $s = (m_1 \pm m_2)^2$ ou $(m_3 \pm m_4)^2$ suivant la détermination de $\sqrt{\Phi(s,t)}$. Nous verrons plus loin que pour écrire explicitement les contraintes, il suffit de connaître les relations entre les comportements aux seuils et pseudo-seuils de la voie s des fonctions $e^{i(\chi_1 \pm \chi_2)}$, $e^{i(\chi_3 \pm \chi_4)}$ et $e^{2i\theta_s}$. Ceci peut être fait directement à partir des résultats démontrés dans l'appendice A.III (équation A.III.1). Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau IV_1 :

Voisinage de $s = (m_1 + m_2)^2$: $e^{i\theta_s} \simeq \varphi_{12}^{\pm 1} \iff e^{-i(\chi_1 - \chi_2)} \simeq \varphi_{12}^{\pm 2}$

Voisinage de $s = (m_1 - m_2)^2$: $e^{i\theta_s} \simeq \Psi_{12}^{\pm 1} \iff e^{-i(\chi_1 + \chi_2)} \simeq \Psi_{12}^{\pm 2\varepsilon_{12}}$

Voisinage de $s = (m_3 + m_4)^2$: $e^{i\theta_s} \simeq \varphi_{34}^{\pm 1} \iff e^{-i(\chi_3 - \chi_4)} \simeq \varphi_{34}^{\pm 2}$

Voisinage de $s = (m_3 - m_4)^2$: $e^{i\theta_s} \simeq \Psi_{34}^{\pm 1} \iff e^{-i(\chi_3 + \chi_4)} \simeq \Psi_{34}^{\pm 2\varepsilon_{34}}$

avec $\varepsilon_{ij} = \frac{m_i - m_j}{|m_i - m_j|}$

TABLEAU IV_1

Les contraintes cinématiques ne font pas autre chose que traduire le comportement des amplitudes $\tilde{T}^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2} = S_{12}^{s_1+s_2}\, S_{34}^{s_3+s_4}\, T^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}$ au voisinage des seuils et des pseudo-seuils. Ces comportements s'obtiennent à l'aide du croisement IV.6 et du tableau IV.1 . Les résultats sont les suivants :

$$\begin{cases} \text{Voisinage de } \varphi_{12}=0 \quad \tilde{T}^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2} \simeq \varphi_{12}^{s_1+s_2\pm(\tau_1+\tau_2)} & \text{si} \quad e^{2i\theta_s} \simeq \varphi_{12}^{\pm 2} \\ \text{Voisinage de } \Psi_{12}=0 \quad \tilde{T}^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2} \simeq \Psi_{12}^{s_1+s_2\pm\varepsilon_{12}(\tau_1-\tau_2)} & \text{si} \quad e^{2i\theta_s} \simeq \Psi_{12}^{\pm 2} \end{cases} \qquad \text{(IV.11)}$$

$$\begin{cases} \text{Voisinage de } \varphi_{34}=0 \quad \tilde{T}^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2} \simeq \varphi_{34}^{s_3+s_4\pm(\tau_3+\tau_4)} & \text{si} \quad e^{2i\theta_s} \simeq \varphi_{34}^{\pm 2} \\ \text{Voisinage de } \Psi_{34}=0 \quad \tilde{T}^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2} \simeq \Psi_{34}^{s_3+s_4\pm\varepsilon_{34}(\tau_3-\tau_4)} & \text{si} \quad e^{2i\theta_s} \simeq \Psi_{34}^{\pm 2} \end{cases} \qquad \text{(IV.11)}$$

Pour rendre claire la signification des équations IV.11 , nous allons faire quelques commentaires.

a) Les équations IV.11 sont bien des contraintes. En effet, les $\tilde{T}^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}$ sont des combinaisons linéaires des amplitudes d'hélicité "régularisées" de la voie s . Nous voyons donc qu'au voisinage de $s = \delta_i$ ($\delta_1 = (m_1+m_2)^2$, $\delta_2 = (m_1-m_2)^2$, $\delta_3 = (m_3+m_4)^2$, $\delta_4 = (m_3-m_4)^2$) ces combinaisons linéaires à coefficients non nuls se comportent comme $(s-\delta_i)^{n_i}$ où n_i est un entier non négatif. En effet la puissance de φ_{12} : $s_1+s_2-(\tau_1+\tau_2)$ est un entier non négatif. Si cet entier est impair, la régularisation nous apprend que l'expression $\dfrac{\tilde{T}^{s}_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}}{\varphi_{12}}$ est "uniforme" à $\varphi_{12}=0$ et se

comporte comme $\varphi_{12}^{2n_1}$ ou comme $(s-\not{s}_1)^{n_1}$. Le même résultat est valable pour le voisinage de $\Psi_{12} = 0$, $\Psi_{34} = 0$ et $\varphi_{34} = 0$.

b) Les équations IV.11 attestent de la cohérence entre la formule de croisement (tableau III_1) et les prescriptions de régularisation des amplitudes d'hélicité. Les relations IV.7 obtenues à partir de la seule régularisation des amplitudes d'hélicité sont en effet compatibles avec les équations IV.11 obtenues à l'aide du croisement. La preuve est simple à établir et découle de la remarque que si $\theta_s(-\sqrt{s-\not{s}_i}) = \theta_s(\sqrt{s-\not{s}_i}) \pm \pi$, alors $e^{i\frac{\theta_s}{2}}$ se comporte comme $(s-\not{s}_i)^{\pm\frac{1}{4}}$ (c'est-à-dire que $e^{2i\theta_s}$ a un zéro ou un pôle à $s = \not{s}_i$) .

c) Si nous changeons dans les équations IV.11 la détermination de la fonction $\sqrt{\Phi(s,t)}$ nous observons que :

i) la fonction $e^{2i\theta_s}$ se change en son inverse,

ii) l'amplitude de transversité $\tilde{T}^s_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}$ se change à une phase près (voir équations II.9 et 11) en l'amplitude $\tilde{T}^s_{-\tau_3-\tau_4;-\tau_1-\tau_2}$. Si bien que l'ensemble de toutes les contraintes écrites au voisinage d'un seuil ou d'un pseudo-seuil pour toutes les valeurs des transversités $\{\tau_i\}$ en prenant le signe + dans les équations IV.11 est identique à celui obtenu en prenant le signe - .

d) Dans la pratique les équations IV.11 doivent être comprises de la façon suivante :

$$0 = \frac{\partial^p \mathcal{T}^j_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(s,t)}{\partial s^p} \Bigg|_{\substack{s=\not{s}_j \\ S_{12}S_{34}\cos\theta_s = -i S_{12}S_{34}\sin\theta_s}} \qquad \text{(IV.12)}$$

pour $p = 0,1,\ldots, \left(\frac{\bar{N}_j}{2} - 1\right)$ $\qquad j = 1,\ldots 4$

où $\begin{cases} \not{s}_1 = (m_1 + m_2)^2 & \not{s}_2 = (m_1 - m_2)^2 \\ \not{s}_3 = (m_3 + m_4)^2 & \not{s}_4 = (m_3 - m_4)^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} N_1 = s_1 + s_2 + \tau_1 + \tau_2 & N_2 = s_1 + s_2 + \varepsilon_{12}(\tau_1 - \tau_2) \\ N_3 = s_3 + s_4 + \tau_3 + \tau_4 & N_4 = s_3 + s_4 + \varepsilon_{34}(\tau_3 - \tau_4) \end{cases}$$

$$\bar{N}_j = \begin{cases} N_j & \text{si } N_j \text{ est un entier pair} \\ N_j - 1 & \text{si } N_j \text{ est un entier impair} \end{cases} \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{m_i - m_j}{|m_i - m_j|}$$

$$\tau^j_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(s,t) = S_{12}^{s_1+s_2}\, S_{34}^{s_3+s_4}\, \frac{T^s_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(s,t)}{(\sqrt{s-\not{s}_j})^{N_j - \bar{N}_j}}$$

De façon complètement équivalente on aurait pu écrire :

$$0 = \left.\frac{\partial^p \tau'^j_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(s,t)}{\partial s^p}\right| \begin{array}{l} s = s_j \\ S_{12}S_{34}\cos\theta_s = iS_{12}S_{34}\sin\theta_s \end{array} \qquad \text{(IV.13)}$$

pour $p = 0,1,\ldots, \left(\frac{\bar{N}'_j}{2} - 1\right)$ $\qquad j = 1,\ldots 4$

où $\begin{cases} N'_1 = s_1 + s_2 - (\tau_1 + \tau_2) & N'_2 = s_1 + s_2 - \varepsilon_{12}(\tau_1 - \tau_2) \\ N'_3 = s_3 + s_4 - (\tau_3 + \tau_4) & N'_4 = s_3 + s_4 - \varepsilon_{34}(\tau_3 - \tau_4) \end{cases}$

et : $$\tau'^j_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(s,t) = S_{12}^{s_1+s_2}\, S_{34}^{s_3+s_4}\, \frac{T^s_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(s,t)}{(\sqrt{s-\not{s}_j})^{N'_j - \bar{N}'_j}} .$$

Lorsque l'on écrit explicitement les amplitudes $\mathcal{T}^j$ et $\mathcal{T}'^j$ en fonction des amplitudes d'hélicité "régularisées" (éqs.IV.8 , IV.3 et tableau II_4) on voit que les contraintes cinématiques équivallent à l'annulation à $s = \mathcal{S}_j$ de combinaisons linéaires à coefficients plynomiaux en t d'amplitudes d'hélicité "régularisées" et de leurs dérivées.

D - Contraintes cinématiques dans les cas particuliers de masse

a) Cas élastique - La méthode générale s'applique au voisinage de $S_{12} = S_{34} = S = 0$. Dans ce cas $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{34}$.

On obtient directement à partir des équations IV.11 ou IV.12 les équations des contraintes à $S = 0$, c'est-à-dire :

$$0 = \left. \frac{\partial^p \mathcal{T}^j_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(s,t)}{\partial\, s^p} \right| \begin{array}{l} s = \mathcal{S}_j \\ S^2\cos\theta_s = -\,iS^2\sin\theta_s \end{array}$$

pour $p = 0,1,\ldots \left(\frac{N_j^-}{2} - 1\right)$ $\qquad j = 1,2$

où $$\begin{cases} \mathcal{S}_1 = (m_1 + m_2)^2 = (m_3 + m_4)^2 \\ \mathcal{S}_2 = (m_1 - m_2)^2 = (m_3 - m_4)^2 \end{cases} \qquad \text{(IV.14)}$$

$$\begin{cases} N_1 = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 \\ N_2 = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \varepsilon_{12}(\tau_1 - \tau_2 + \tau_3 - \tau_4) \end{cases}$$

et $$\mathcal{T}^j_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(s,t) = s^{s_1+s_2+s_3+s_4} \frac{T^s_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}}{(\sqrt{(s - \mathcal{S}_j)})^{N_j - N_j^-}}$$

ou de manière équivalente :

$$0 = \frac{\partial^p \tau'^j_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}(s,t)}{\partial\, s^p}\Bigg|_{\substack{s = \not{s}_j \\ S^2\cos\theta_s = iS^2\sin\theta_s}} \qquad \text{(IV.15)}$$

pour $p = 0,1,\ldots \left(\frac{N'^-_j}{2} - 1\right)$ $\qquad j = 1,2$

où $\begin{cases} N'^+_1 = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4) \\ N'^+_2 = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 - \varepsilon_{12}(\tau_1 - \tau_2 + \tau_3 - \tau_4) \end{cases}$

et : $$\tau'^j_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2} = S^{s_1+s_2+s_3+s_4} \frac{T^s_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}}{(\sqrt{s - \not{s}_j})^{N'^+_j - N'^-_j}} .$$

b) Autres cas

De nouveaux problèmes se posent dès qu'une des deux fonctions Ψ_{ij} (pseudo-seuil) se confond avec la fonction $\sqrt{s}$. Ces cas particuliers sont traités dans l'appendice A.IV. Enfin dans l'appendice A.V nous montrons que les contraintes déjà observées dans les cas où les amplitudes invariantes permettaient le calcul s'obtiennent facilement comme cas particuliers des formules générales (IV.12 ou IV.13).

V - CONCLUSIONS

Cette étude des propriétés d'analyticité dans les invariants des amplitudes d'hélicité nous a permis d'obtenir de nouvelles amplitudes qui sont analytiques dans l'image du domaine d'analyticité des amplitudes spinorielles dans l'espace des quadri-impulsions sur la couche de masse. Nos résultats sont valables dans presque tous les cas de masses et quels que soient les spins, à l'exception des réactions Boson-Fermion → Boson-Fermion où l'on ne peut supprimer une singularité du type racine carrée dans la variable carré de l'énergie dans le centre de masse, et ceci en accord avec la "relation de réciprocité de Mac-Dowell . Pour mener à bien ce travail, nous avons utilisé de façon intensive les propriétés d'analyticité du développement de Joos[2] des amplitudes spinorielles et l'existence d'un domaine d'analyticité pour les amplitudes spinorielles qui met en communication les différentes régions physiques d'une réaction à deux corps donnée (propriété de croisement)[5] . La résolution du problème des contraintes a été grandement facilitée par l'usage des amplitudes de transversité[9].

Nous avons obtenu trois types de résultats :

1) Les amplitudes d'hélicité peuvent être débarassées de leurs singularités cinématiques. Plus précisément, que la parité soit conservée ou non, on peut définir de nouvelles amplitudes linéairement indépendantes $\mathcal{F}_{\{\lambda\}}$ qui sont reliées aux amplitudes invariantes de Joos $a_{\ell_1 \ell_2}$ (Eq. II.27) par des polynômes des variables s,t et u* .

---

* Quand la voie considérée correspond à un état Boson-Fermion, on doit remplacer la variable carré de l'énergie dans le centre de masse par sa racine carrée.

2) Une matrice de croisement entre les amplitudes d'hélicité a été écrite en utilisant un chemin de prolongement analytique d'une région physique à l'autre. La matrice de croisement entre les amplitudes d'hélicité "régularisées" a tous ses éléments de la forme $\frac{P}{Q}$ où P et Q sont des polynômes en s,t,u .*

3) Le problème posé par l'existence des zéros des polynômes Q est facilement résolu à l'aide des amplitudes de transversité car le croisement relie une amplitude de la voie s à une amplitude et une seule de la voie t . La solution peut s'exprimer au moyen de relations entre les amplitudes "régularisées" $\mathcal{F}_{\{\lambda\}}$ et un certain nombre de leurs dérivées par rapport au carré de l'énergie dans le centre de masse, qui sont valables aux seuils et aux pseudo-seuils de la voie considérée.

A notre avis, ces résultats sur les propriétés d'analyticité des amplitudes d'hélicité peuvent être utiles pour les deux sortes de problèmes suivants, dont le premier est à la source de ce travail :

1) Dans tout modèle phénoménologique qui utilise les propriétés de croisement, et spécialement pour des modèles à la Regge, les amplitudes d'hélicité "régularisées" $\mathcal{F}_{\{\lambda\}}$ qui admettent par hypothèse la représentation de Mandelstam pourront être approximées par des fonctions du type Regge. De plus les contraintes cinématiques donnent des informations supplémentaires sur les relations entre les résidus d'un pôle de Regge donné ou sur l'existence de familles de pôles suivant qu'on s'intéresse au point de vue des "évasions" ou des "conspirations" [20]. Ces propriétés et les relations de croisement permettent d'écrire des formules phénoménologiques qui sont correctes au moins du point de vue cinématique.

---

* Quand la voie considérée correspond à un état Boson-Fermion, on doit remplacer la variable carré de l'énergie dans le centre de masse par sa racine carrée.

Par ailleurs nos résultats sur les contraintes ont prouvé que dans le cas général de masse, aucune contrainte ne se produisait pour une valeur nulle du carré de l'énergie dans le centre de masse. La relation découverte par Gribov et Volkov[17] dans la réaction $N\bar{N} \to N\bar{N}$ à $t = 0$ (t est le carré de l'énergie dans le centre de masse) se généralise pour des spins quelconques uniquement dans le cas de masses égales. Dans le cas général de masse, la contrainte correspondante se produit au pseudo-seuil. L'existence de ces contraintes est une propriété très générale des amplitudes d'hélicité d'une réaction entre particules à spins suffisamment élevés. Ces relations, bien qu'elles se produisent parfois à énergie dans le centre de masse nulle, semblent d'une nature différente de celle des contraintes qui sont impliquées dans un modèle de pôle de Regge, entre les trajectoires "filles" [18]. Par exemple dans la réaction $NN - NN$, il n'y a pas besoin de trajectoires "filles" car toutes les masses sont égales alors qu'une contrainte à $s = 0$ existe du fait de cette égalité de masse.

2) Un autre champ d'application de cette étude pourrait être de permettre la généralisation à des cas de spin non nul des résultats obtenus à partir de la théorie axiomatique des champs sur le domaine d'analyticité de l'amplitude dans le cas sans spin[19]. Nous devons toutefois remarquer que l'agrandissement du domaine d'analyticité a été obtenu en utilisant la propriété de positivité de la partie absorptive qui est une conséquence de l'unitarité. Le contenu de l'unitarité semble difficile à exprimer aussi simplement par une condition de positivité dans le cas où il existe plusieurs voies couplées à deux corps,ce qui se produit dans toute réaction élastique entre particules à spin.

Enfin, nos résultats permettront peut-être de construire à partir des amplitudes d'hélicité "régularisées" et des contraintes, de nouvelles amplitudes qui auront les mêmes propriétés d'analyticité mais ne seront soumises à aucune contrainte. On aura trouvé alors une nouvelle base pour le développement analytique des amplitudes spinorielles. La conservation de la parité sera facile à exprimer et les indices servant à distinguer les amplitudes auront un sens physique puisqu'ils seront reliés aux composantes de chaque spin individuel.

APPENDICE A.I

SINGULARITES CINEMATIQUES DANS LES CAS PARTICULIERS DE MASSE

Dans cette appendice nous donnons les détails de calculs prouvant la validité des résultats contenus dans les tableaux II_6 à II_{10} . Nous n'avons pas étudié cependant des cas aussi pathologiques que,par exemple, le cas où les seuils sont identiques $(m_3+ m_4= m_1+ m_2)$ sans que les pseudo-seuils le soient $(m_1- m_2\neq m_3- m_4)$. De plus nous supposerons que lorsque deux particules ont la même masse,elles ont aussi le même spin. Enfin dans toute cette étude, la parité sera supposée conservée.

L'étude de la singularité cinématique à $\Phi(s,t) = 0$ est dans tous les cas la même que celle du cas général.

1) Cas où les deux masses initiales sont égales

Dans ce cas $(m_1= m_2= m \; ; \; m_3\neq m_4)$, l'étude générale s'applique pour les seuils et pseudo-seuils finaux (singularité à $S_{34}= 0$) et pour le seuil initial (singularité à $\varphi_{12}= 0$) . La seule différence provient du fait que la singularité au pseudo-seuil s'observe à $s = 0$ $(\Psi_{12}= \sqrt{s}\,)$.

A - Régularisation à $s = 0$

Plaçons nous dans le référentiel R_2 , dans lequel la composante 3 des deux semi-bivecteurs est régulière à $s = 0$.

Les quantités cinématiques qu'il est utile de considérer sont :

$$\begin{cases} k = \dfrac{\sqrt{s-4m^2}}{2} \quad ; \qquad \omega = \omega_1 = \omega_2 = \dfrac{\sqrt{s}}{2} \\ \cos\theta_s = \dfrac{\sqrt{s}\,(2t + s - \sum_i m_i^2)}{\sqrt{s-4m^2}\;S_{34}} \quad ; \quad \sin\theta_s = \dfrac{2\sqrt{\Phi}}{\sqrt{s-4m^2}\;S_{34}} \end{cases} .$$

Si l'on tourne autour du point $s = 0$, on observe les changements suivants :

$$\begin{cases} \text{la quantité } \omega_i \pm p \ (i = 3,4) & \text{se change en } -(\omega_i \pm p) \\ \text{la quantité } \left(\dfrac{\omega-k}{m}\right) & \text{se change en } -\dfrac{m}{\omega-k} \\ \text{et l'angle } \theta_s & \text{se change en } \pi - \theta_s \ . \end{cases}$$

On obtient alors aisément la relation entre les deux déterminations de l'amplitude d'hélicité correspondant aux deux déterminations de la fonction $\sqrt{s}$ si on se souvient de l'égalité suivante :

$$d^{s_i}(\pi - \theta_s)^{A_i}_{\lambda_i} = (-1)^{s_i - A_i}\, d^{s_i}(\theta_s)^{A_i}_{-\lambda_i} \ .$$

La relation s'écrit :

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\sqrt{s}) = (-1)^{\sum_i \lambda_i}\, \eta_{12}\, \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}(\sqrt{s}) \ .$$

On en déduit alors que :

Si $\sum_i \lambda_i$ est pair : les fonctions $\mathcal{A}_{12}$ et $k\sqrt{s}\ \mathcal{B}_{12}$ sont "uniformes" à $s = 0$ et $s = 4m^2$

Si $\sum_i \lambda_i$ est impair : les fonctions $\sqrt{s}\ \mathcal{A}_{12}$ et $k\ \mathcal{B}_{12}$ sont "uniformes" à $s = 0$ et $s = 4m^2$.

B - Pôles cinématiques à $s = 0$

D'après l'étude générale, on trouve que chaque terme du développement B des amplitudes d'hélicité dans le référentiel R_2 se comporte au voisinage de $s = 0$ comme $\sqrt{s}^{\ \varepsilon\ \varepsilon_{34}(A_1+A_2)}$. Comme les indices muets A_1 et A_2 varient dans l'intervalle $[-s_i, s_i]$, où s_i désigne le spin des particules initiales, la somme de ces termes se comportera comme $\sqrt{s}^{-2s_i}$ au voisinage de $s = 0$. En tenant compte de la régularisation on voit que :

les fonctions $\sqrt{s}^{(2s_i)^-}\ \mathcal{A}_{12}$ et $(\sqrt{s})^{(2s_i)^+-1}\ \mathcal{B}_{12}$ sont "régulières" à $s = 0$ si $\sum_i \lambda_i$ est pair

et que les fonctions $(\sqrt{s})^{(2s_i)^+-1}\ \mathcal{A}_{12}$ et $\sqrt{s}^{(2s_i)^-}\ \mathcal{B}_{12}$ sont "régulières" à $s = 0$ si $\sum_i \lambda_i$ est impair .

L'ensemble des résultats est contenu dans le tableau II_6 .

2) Cas où les masses finales sont identiques

La démonstration est calquée sur la précédente. On trouve que :

les fonctions $(\sqrt{s})^{2s_f^-}\mathcal{A}_{34}$ et $\sqrt{s}^{(2s_f)^+-1}\mathcal{B}_{34}$ sont

"régulières" à $s = 0$ si $\sum_i \lambda_i$ est pair

et que les fonctions $\sqrt{s}^{(2s_f)^+-1}\mathcal{A}_{34}$ et $\sqrt{s}^{(2s_f)^-}\mathcal{B}_{34}$ sont

"régulières" à $s = 0$ si $\sum_i \lambda_i$ est impair .

L'ensemble des résultats est contenu dans le tableau II_7 .

3) Cas élastique : $m_1 = m_3$; $m_2 = m_4$ $(m_2 \neq m_1)$

On voit immédiatement que la singularité à $S_{12} = 0$ se confond avec la singularité à $S_{34} = 0$. Les développements A et B perdent beaucoup de leur intérêt car les composantes des deux semi-bivecteurs sont singulières à $S_{12} = S_{34} = S = 0$. Par contre les quantités $p\cos\frac{\theta_s}{2}$ et $p\sin\frac{\theta_s}{2}$ sont régulières à $S = 0$ $(p = k = \frac{S}{2\sqrt{s}})$. Nous sommes amenés à choisir un nouveau référentiel R_3 caractérisé par son quadrivecteur $n_3(R) = \frac{q_{12}+ q_{34}}{\sqrt{-(q_{12}+ q_{34})^2}}$.
Dans ce référentiel R_3 les amplitudes spinorielles $M_{\{A_i\}}(\Lambda p_i)$ seront "régulières". Le développement C correspondant est écrit dans le tableau $A.I_1$.

A - Suppression du point de branchement à $S = 0$

a) Cas du seuil : $s = (m_1 + m_2)^2$

On utilise le développement C défini dans le référentiel R_3 . Si l'on tourne autour du point $s = (m_1 + m_2)^2$, on observe les changements suivants :

Référentiel R_3

$$t^R = \frac{P}{\sqrt{s}} \quad , \quad n_2^R = w \quad , \quad n_3^R = \frac{q_{12}+q_{34}}{\sqrt{-(q_{12}+q_{34})^2}}$$

$$\xrightarrow[e(\Lambda p_1, \Lambda p_3)]{} \begin{cases} Ep \sin\frac{\theta_s}{2} \\ -i\frac{p^2}{2}\sin\theta_s \\ 0 \end{cases} \qquad \xrightarrow[e(\Lambda p_2, \Lambda p_3)]{} \begin{cases} \frac{1}{2} p \sin\frac{\theta_s}{2}\,(\omega - E) \\ \frac{i}{2} p^2 \sin\theta_s \\ \frac{i}{2} p \cos\frac{\theta_s}{2}\,(\omega + E) \end{cases}$$

$$\Lambda L_{12}(1) = R_y\,(-\tfrac{\theta_s}{2})\,B_1$$
$$\Lambda L_{12}(2) = R_y\,(-\tfrac{\theta_s}{2} + \pi)\,B_2$$
$$\Lambda L_{12}(3) = R_y\,(\tfrac{\theta_s}{2})\,B_3$$
$$\Lambda L_{12}(4) = R_y\,(\pi + \tfrac{\theta_s}{2})\,B_4$$

Développement C

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sum (-1)^{s_2-\lambda_2+s_3+\lambda_3}\, D^{s_1}(B_1)^{\lambda_1}_{\lambda_1}\, D^{s_2}(B_2)^{\lambda_2}_{\lambda_2}\, D^{s_3}(B_3)^{-\lambda_3}_{-\lambda_3}\, D^{s_4}(B_4)^{-\lambda_4}_{-\lambda_4}$$

$$d^{s_1}(-\tfrac{\theta_s}{2})^{A_1}_{\lambda_1}\, d^{s_2}(-\tfrac{\theta_s}{2})^{A_2}_{-\lambda_2}\, d^{s_3}(\tfrac{\theta_s}{2})^{A_3}_{-\lambda_3}\, d^{s_4}(\tfrac{\theta_s}{2})^{A_4}_{\lambda_4} \quad \ldots\ldots$$

Les pointillés tiennent lieu de quantités "régulières" à $S = 0$

TABLEAU A.I_1

Le tableau donne la forme explicite du développement (II.9) correspondant au référentiel R_3, qui est très utile pour l'étude des singularités cinématiques à $S = 0$ dans le cas élastique.

l'angle $\frac{\theta_s}{2}$ se change en $\frac{\theta_s}{2} \pm \pi$

l'impulsion p se change en $-p$

l'élément de matrice $\frac{\omega_i - p}{m_i}$ se change en son inverse $\frac{m_i}{\omega_i - p} = \frac{\omega_i + p}{m_i}$.

La relation entre les deux déterminations des amplitudes $\hat{M}_{\{\lambda_i\}}$ correspondant aux deux déterminations de la fonction φ_{12} s'écrit :

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\varphi_{12}) = (-1)^{\sum_i (s_i + \lambda_i)} \hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}(\varphi_{12}) = \eta \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\varphi$$

Or, d'après nos hypothèses, $\eta = +1$. Donc la fonction $\hat{M}_{\{\lambda_i\}}$ est "uniforme" au seuil.

b) Cas du pseudo-seuil : $s = (m_1 - m_2)^2$

Un raisonnement analogue nous conduit à la relation :

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\Psi_{12}) = \eta\,(-1)^{2s_1 + 2s_3}\, \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\Psi_{12}) .$$

Or $s_1 = s_3$, et $\eta = +1$. Donc la fonction $\hat{M}_{\{\lambda_i\}}$ est aussi "uniforme" au pseudo-seuil.

B - Pôles cinématiques au seuil et au pseudo-seuil

Les matrices $d^s(-\frac{\theta_s}{2})$ sont des polynômes homogènes de degré $2s$

en $\sin\frac{\theta_s}{4}$ et $\cos\frac{\theta_s}{4}$. Elles se comportent donc au voisinage de $S = 0$ comme S^{-s} , si bien qu'au voisinage de $S = 0$, l'amplitude $\hat{M}_{\{\lambda\}}$ se comporte comme $S^{-2[s_1+s_2-\text{Max}\{|\lambda|,|\mu|\}]}$

C - Singularités cinématiques à $s = 0$

L'étude a déjà été faite dans le cas général. Mais dans le cas présent, il n'est pas utile d'associer deux amplitudes d'hélicité pour obtenir une amplitude "uniforme" à $S = 0$. C'est-à-dire que dans le cas élastique, même dans le cas Boson-Fermion, nous pouvons régulariser à la fois à $s = 0$ et à $S = 0$. Dans le cas général l'amplitude $\hat{M}_{\{\lambda_i\}}$ se comporte comme $\sqrt{s}^{-|\lambda-\varepsilon_{12}\varepsilon_{34}\mu|}$ au voisinage de $s = 0$. Or dans le cas élastique le produit $\varepsilon_{12}\varepsilon_{34}$ est égal à 1 . Si bien que la fonction :

$$\sqrt{s}^{|\lambda-\mu|}\, S^{2[s_1+s_2-\text{Max}\{|\lambda|,|\mu|\}]}\, \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$$

est "régulière" . Ces résultats sont contenus dans le tableau II_8 .

4) $m_1 = -m_2 = m$; $m_3 = -m_4 = m'$; $m' \neq m$

L'étude est valable aux seuils de la réaction. Par contre, les pseudo-seuils sont confondus à $s = 0$. On se rend rapidement compte qu'aucun des trois développements A, B ou C définis dans les référentiels R_1 , R_2 ou R_3 respectivement ne convient pour l'étude de la singularité à $s = 0$. En effet les composantes 3 des semi-bivecteurs dans ces différents référentiels sont singuliers à $s = 0$. Cependant, on remarque que la composante 2 de chaque semi-bivecteur est toujours régulière à $s = 0$, car elle vaut

$\pm$ i p k $\sin\theta_s$. Il suffit alors de choisir un quatrième référentiel R_4 dans lequel l'axe 3 est l'axe 2 des anciens référentiels. Le développement D de l'amplitude d'hélicité correspondant au référentiel R_4 est écrit dans le tableau $A.I_2$.

A - Suppression du point de branchement à $s = 0$

Les seules quantités singulières à $s = 0$ sont les éléments de matrice des transformations de Lorentz pures. L'angle θ_s et les impulsions p et k sont réguliers à $s = 0$. Toutes les énergies par contre sont singulières à $s = 0$, car elles sont égales à $\frac{\sqrt{s}}{2}$. Donc lorsqu'on tourne autour du point $s = 0$, la quantité $\frac{\omega_i - p_{ij}}{m_i}$ se change en $-\frac{\omega_i + p_{ij}}{m_i}$.

La relation entre les deux déterminations de l'amplitude $\hat{M}_{\{\lambda\}}$ correspondant aux deux déterminations de la fonction $\sqrt{s}$ s'obtient en utilisant la propriété suivante de la matrice $D^s\left(-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$:

$$D^s\left(-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right)^A_c \; d^s(\theta)^c_\lambda = (-1)^{s+A}\, e^{-i\pi\lambda}\, D^s\left(-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right)^A_c \; d^s(\theta)^c_{-\lambda} .$$

La relation s'écrit :

$$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\sqrt{s}) = \hat{M}_{-\lambda_3-\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}(\sqrt{s})\,(-1)^{\sum_i s_i}$$

ou $$\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\sqrt{s}) = \eta(-1)^{\sum_i \lambda_i}\, \hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$$ si l'on tient

compte de la conservation de la parité.

Référentiel R_4

$$t^R = \frac{P}{\sqrt{s}} \quad , \quad n_2^R = - \frac{q_{12} + q_{34}}{\sqrt{-(q_{12} + q_{34})^2}} \quad , \quad n_3^R = w \ .$$

$$\overrightarrow{e(\Lambda p_1, \Lambda p_3)} = \begin{cases} \frac{\sqrt{s}}{4} \sin\frac{\theta_s}{2} (k+p) \\ - \frac{\sqrt{s}}{4} \cos\frac{\theta_s}{2} (p-k) \\ - \frac{i}{2} p\, k \sin\theta_s \end{cases} \qquad \overrightarrow{e(\Lambda p_2, \Lambda p_3)} = \begin{cases} \frac{\sqrt{s}}{4} \sin\frac{\theta_s}{2} (p-k) \\ - \frac{\sqrt{s}}{4} \sin\frac{\theta_s}{2} (p+k) \\ \frac{i}{2} p\, k \sin\theta_s \end{cases}$$

$$\Lambda L_{12}(1) = R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) R_y\left(-\frac{\theta_s}{2}\right) B_1$$

$$\Lambda L_{12}(2) = R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) R_y\left(-\frac{\theta_s}{2} + \pi\right) B_2$$

$$\Lambda L_{12}(3) = R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) R_y\left(\frac{\theta_s}{2}\right) B_3$$

$$\Lambda L_{12}(4) = R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) R_y\left(\frac{\theta_s}{2} + \pi\right) B_4$$

$R_x(\frac{\pi}{2})$ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe $\overset{o}{n}_1$. Ses angles d'Euler sont $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Développement D

$$M_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sum (-1)^{s_2 - \lambda_2 + s_3 + \lambda_3} D^{s_1}(B_1)^{\lambda_1}_{\lambda_1} D^{s_2}(B_2)^{\lambda_2}_{\lambda_2} D^{s_3}(B_3)^{-\lambda_3}_{-\lambda_3} D^{s_4}(B_4)^{-\lambda_4}_{-\lambda_4}$$

$$D^{s_1}(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})^{A_1}_{c_1} d^{s_1}(-\tfrac{\theta_s}{2})^{c_1}_{\lambda_1} D^{s_2}(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})^{A_2}_{c_2} d^{s_2}(-\tfrac{\theta_s}{2})^{c_2}_{\lambda_2} D^{s_3}(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})^{A_3}_{c_3}$$

$$d^{s_3}(\tfrac{\theta_s}{2})^{c_3}_{\lambda_3} D^{s_4}(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})^{A_4}_{c_4} d^{s_4}(\tfrac{\theta_s}{2})^{c_4}_{\lambda_4} \sqrt{s}^{\,|M_1| + |M_2|} \quad \ldots .$$

$$M_1 + M_2 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

Les pointillés désignent des quantités "régulières" à $s = 0$

TABLEAU A.I_2 - Le tableau donne la forme explicite du développement II.9 dans le référentiel R_4 qui est utile pour l'étude des singularités cinématiques à $s = 0$.

Conclusion :

La fonction $\hat{M}_{\{\lambda\}}$ est "uniforme" à $s = 0$ si $\eta(-)^{\sum_i \lambda_i} = 1$

et la fonction $\sqrt{s}\ \hat{M}_{\{\lambda\}}$ est "uniforme" à $s = 0$ si $\eta(-)^{\sum_i \lambda_i} = -1$.

B - Pôles cinématiques à $s = 0$

Chaque terme de la somme qui apparaît dans le développement D se comporte comme $\sqrt{s}^{\,|M_1|+|M_2|}$ au voisinage de $s = 0$. L'exposant $|M_1|+|M_2|$ étant non négatif, il n'y a pas de pôle cinématique à $s = 0$. Les fonctions $\hat{M}_{\{\lambda\}}$ sont "régulières" si la phase $\eta(-)^{\sum_i \lambda_i}$ vaut $+1$ et les fonctions $\frac{M_{\{\lambda\}}}{\sqrt{s}}$ sont "régulières" si la phase $\eta(-1)^{\sum_i \lambda_i}$ vaut -1 .

Les autres résultats sont donnés dans le tableau II_9 .

5) Cas où toutes les masses sont égales

Les deux seuils se confondent. Les résultats obtenus dans le cas élastique sont valables. Les deux pseudo-seuils de la réaction sont à $s = 0$. Les résultats obtenus dans le cas précédent restent valables.

En conclusion :

Les fonctions $p^{2(2\delta-\mathrm{Max}\{|\lambda|,|\mu|\})}\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ sont "régulières" si la somme $\sum_i \lambda_i$ est paire et les fonctions $p^{2(2\delta-\mathrm{Max}\{|\lambda|,|\mu|\})}\frac{\hat{M}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}}{\sqrt{s}}$

sont "régulières" si la somme $\sum_i \lambda_i$ est impaire.

Tous ces résultats sont contenus dans le tableau II_{10} .

APPENDICE A.II

DETERMINATION DU SIGNE GLOBAL $\eta^{(s)}$ DE LA MATRICE DE CROISEMENT

La méthode que nous avons employée dans le chapitre III ne peut pas nous donner le signe global puisque nous nous sommes occupés du prolongement des tétrades d'hélicité et non de celui des matrices 2×2 $L_{31}(i)$.

Nous allons tout d'abord prouver que le signe η^s peut se mettre uniquement sous la forme d'un produit de facteurs de la forme $(-1)^{2s_i}$. Comme on l'a vu dans le chapitre III.§.2 , les fermions peuvent être associés par paires de sorte que l'on peut prolonger sans ambiguïté le produit tensoriel des deux matrices $L_{31}(i)$ correspondantes. Cela signifie que le signe relatif de $L_{31}^{c-1}(i)\, L_{12}(i)$ et $L_{31}^{c-1}(j)\, L_{12}(j)$ peut être déterminé indépendamment du chemin Γ dans l'espace des quadrivecteurs q_i .

Définissons le signe ε_Γ par l'équation :

$$\mathcal{L}(i) = L_{31}^{-1}(i)\, L_{12}(i) = \varepsilon_\Gamma\, \alpha_i$$

où α_i est la matrice 2×2 définie dans l'équation III.6a ; $L_{31}^{\sigma}(i)$ est le prolongement analytique de $L_{31}(i)$ le long du chemin Γ . Les trois matrices 2×2 $\mathcal{L}(i)$ $(i = 2,3,4)$ obtenues par un prolongement analytique le long du même chemin Γ peuvent s'écrire comme :

$$\mathcal{L}(i) = \varepsilon_\Gamma\, \varepsilon_i'\, \alpha_i \qquad \text{où} \qquad \varepsilon_i' \quad \text{vaut} \quad \pm 1 \ .$$

Ceci nous prouve que le signe global η^s vaut :

$$\eta^s = \varepsilon_\Gamma^{\sum_i 2s_i} \; \varepsilon'^{2s_2}_2 \; \varepsilon'^{2s_3}_3 \; \varepsilon'^{2s_4}_4 \quad .$$

On en déduit, puisque $\sum_i 2s_i$ est un entier pair, que le signe η^s est indépendant de Γ et que de plus c'est un produit de facteur $(-1)^{2s_i}$. En particulier η^s vaut $+1$ pour une réaction entre quatre bosons.

Puisque $(-1)^{\sum_i 2s_i} \equiv 1$, les seules possibilités pour le signe η^s sont $(-1)^{2s_1}$, $(-1)^{2s_2}$, $(-1)^{2s_3}$, $(-1)^{2s_4}$, $(-1)^{2s_1+2s_2}$, $(-1)^{2s_1+2s_3}$, $(-1)^{2s_1+2s_4}$.

Une première simplification est reliée au caractère involutif de l'opération de croisement.

Le croisement du tableau III_7 s'écrit :

$$M^s_{\{\lambda\}} = (-1)^{\sigma(P)} \; \eta^s \; e^{i\pi(\lambda_2-\lambda_3)} \prod_i d^{s_i}(\chi_i)^{\lambda'_i}_{\lambda_i} \; M^t_{\{\lambda'\}} \quad , \qquad \text{(A.II.}$$

si l'on permute s et t dans la relation ci-dessus, on obtient :

$$M^t_{\{\lambda'\}} = (-1)^{\sigma(P)} \; \eta^t \; e^{i\pi(\lambda'_2-\lambda'_3)} \prod_i d^{s_i}(\chi^t_i)^{\lambda''_i}_{\lambda'_i} \; M^s_{\{\lambda''\}} \quad . \qquad \text{(A.II.}$$

Puisque le prolongement analytique est fait le long du même chemin, les angles χ_i et $\chi_i^{(t)}$ peuvent être comparés au même point.

On trouve :

$$\left.\begin{aligned} \chi_i &= -\chi_i^t \quad \text{pour les particules "croisées"} \\ \text{et} \quad \chi_i &= \chi_i^t \quad \text{pour les particules "non croisées"} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.II.3}$$

Si l'on inverse maintenant l'expression (A.II.1) et si l'on utilise les relations A.II.3 , on voit, en comparant les deux expressions obtenues pour $M^t_{\{\lambda'\}}$, que :

$$\eta^{(s)} = (-1)^{2s_2 + 2s_3}\, \eta^{(t)} \quad . \qquad \text{(A.II.4}$$

Ceci nous laisse quatre possibilités pour le signe η^s :

$$(-1)^{2s_1},\ (-1)^{2s_4},\ (-1)^{2s_1+2s_2} \quad \text{et} \quad (-1)^{2s_1+2s_3} \ .$$

Comme conséquence de notre discussion sur l'ambiguïté de signe, nous pouvons choisir un chemin de prolongement Γ et écrire pour ce chemin :

$$\varepsilon_i \alpha_i = L_{31}^{c-1}(i)\, L_{12}(i) \qquad \text{où} \qquad \varepsilon_i = \pm 1 \ .$$

$$\text{Alors} \quad \eta^s = \varepsilon_1^{2s_1}\, \varepsilon_2^{2s_2}\, \varepsilon_3^{2s_3}\, \varepsilon_4^{2s_4} = (\varepsilon_1\varepsilon_2)^{2s_2}\, (\varepsilon_1\varepsilon_3)^{2s_3}\, (\varepsilon_1\varepsilon_4)^{2s_4} \ .$$

Par simple inspection, on voit que la détermination de deux signes relatifs, par exemple $\varepsilon_1\varepsilon_3$ et $\varepsilon_1\varepsilon_4$, nous permet de distinguer le signe parmi les quatre possibilités restantes.

En mettant explicitement en évidence la matrice $\varepsilon = i\sigma_2$ qui intervient dans la définition des états d'hélicité à deux corps, nous définissons des matrices 2×2 β_i par les relations :

$$\varepsilon_1 \alpha_1 = i\sigma_2 \beta_1$$

$$\varepsilon_2 \alpha_2 = i\sigma_2 \beta_2 (i\sigma_2)^{-i}$$

$$\varepsilon_3 \alpha_3 = \beta_3$$

$$\varepsilon_4 \alpha_4 = \beta_4 (i\sigma_2)^{-1} \quad ,$$

les signes $\varepsilon_1 \varepsilon_3$ et $\varepsilon_2 \varepsilon_4$ sont alors définis par le calcul direct des matrices

$$\begin{cases} \gamma_{31} = \varepsilon_1 \varepsilon_3 \ \alpha_3^{-1} (i\sigma_2)^{-1} \ \alpha_1 = \beta_3^{-1} \ \beta_1 \\ \gamma_{42} = \varepsilon_4 \varepsilon_2 \ (i\sigma_2)^{-1} \ \alpha_4^{-1} (i\sigma_2)^{-1} \ \alpha_2 (i\sigma_2) = \beta_4^{-1} \ \beta_2 \ , \end{cases} \qquad \text{(A.II}$$

Si on prend ρ suffisamment grand dans la définition du chemin C (§ III.3.A) , on obtient un chemin qui se trouve constamment éloigné des singularités dont les positions dépendent de la valeur des masses. On en déduit que le signe η^s ne dépend pas du cas de masse considéré, si bien qu'il peut être évalué lorsque toutes les masses sont égales.

Dans ce cas l'équation A.II.5 se réduit à :

$$\begin{cases} \gamma_{31} = - i\varepsilon_1 \varepsilon_3 \ \sigma_1 = \beta_3^{-1} \ \beta_1 \\ \gamma_{42} = i\varepsilon_2 \varepsilon_4 \ \sigma_1 = \beta_4^{-i} \ \beta_2 \ . \end{cases} \qquad \text{(A.II.}$$

- Calcul de la matrice $\gamma_{31} = \beta_3^{-1} \ \beta_1$ -

Les équations de $L_{31}(i)$ et $L_{12}(i)$ sont données par les équations III.3 et III.4 .Si l'on définit $L'_{31}(i) = L_{31}(i) \ \varepsilon'^{-1}$ et $L'_{12}(i) = L_{12}(i) \ \varepsilon'^{-1}$,

on obtient :

$$\gamma_{31} = L'^{-1}_{12}(3)\ \ L'^{c}_{31}(3)\ \ L'^{-1c}_{31}(1)\ \ L'_{12}(1)\ \ .$$

Les particules 3 et 1 appartiennent au même état (final) dans la voie t . Alors, à l'aide de l'équation III.1 , on déduit :

$$L'_{31}(3)\ L'^{-1}_{31}(1) = B\left(\frac{P_t}{\sqrt{t}} \rightarrow \frac{q_3}{m}\right)\ B^{-1}\left(\frac{P_t}{\sqrt{t}} \rightarrow \frac{q_1}{m}\right)\ .$$

Cette matrice à trace positive (on peut s'en rendre compte en prenant $q_3 = q_1$) représente la transformation de Lorentz pure dans le biplan q_1, q_3 qui amène le quadrivecteur $\frac{q_1}{m}$ sur $\frac{q_3}{m}$.

Donc $$L'_{31}(3)\ L'^{-1}_{31}(1) = \frac{m^2 + \sigma q_3 \sigma q_1}{\sqrt{2m^2(m^2+q_1 q_3)}}\ .$$

Son prolongement analytique s'écrit donc :

$$L'^{c}_{31}(3)\ L'^{-1c}_{31}(1) = \frac{m^2 - \sigma p_3 \sigma p_1}{\sqrt{2m^2(m^2-q_1 q_3)}}\ .$$

L'équation A.III.6 montre que les matrices γ_{31} et γ_{42} ne dépendent pas du référentiel du laboratoire. Alors, une fois le prolongement analytique fait, on peut prendre comme nouveau référentiel, le référentiel du centre de masse de la voie s admettant w pour axe 2 et q_{12} pour axe 3 . Soit θ_s l'angle de diffusion.

on obtient : $L'_{12}(1) = \frac{m+\sigma p_1}{\sqrt{2m(E+m)}}$ $\qquad L'_{12}(3) = \frac{m+\sigma p_3}{\sqrt{2m(E+m)}}$ $\qquad R(\theta_s)$

où : $R(\theta_s) = \cos\frac{\theta_s}{2} - i\sigma_2 \sin\frac{\theta_s}{2}$ et $E = \frac{\sqrt{s}}{2}$.

Nous pouvons maintenant évaluer la matrice γ_{31} complètement, on trouve :

$$\gamma_{31} = R^{-1}(\theta_s)\left(\frac{\vec{\sigma}.\vec{p}_3 - \vec{\sigma}.\vec{p}_1}{\sqrt{t}}\right) .$$

Le calcul de la trace $\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(i\sigma_1\gamma_{31})$ nous permet d'obtenir :

$$\varepsilon_1\varepsilon_3 = \frac{2ip\,\sin\frac{\theta_s}{2}}{\sqrt{t}}$$

avec $2p = \sqrt{s-4m^2} > 0$ au-dessus de la coupure en s .
Dans la région physique de la voie s , t est négatif et $\sqrt{t} = i|t|^{1/2}$,
L'angle θ_s est positif si bien que $\sin\frac{\theta_s}{2} = \frac{|t|^{1/2}}{2p}$.

Alors : $\varepsilon_1\varepsilon_3 = +1$.

- Calcul direct de $\gamma_{42} = \beta_4^{-1}\beta_2$ -

Le même procédé peut s'appliquer exactement car les particules 4 et 2 appartiennent aussi au même état (initial) dans la voie t .

Tout calcul fait, on trouve $\gamma_{42} = R^{-1}(\theta_s)\,\frac{(\vec{\sigma}.\vec{p}_4 - \vec{\sigma}.\vec{p}_1)}{\sqrt{t}}$ si on se place dans le référentiel du centre de masse défini précédemment. De sorte que : $\gamma_{42} = -\gamma_{31}$.

En comparant avec l'équation (A.II.6), on déduit :

$$\varepsilon_2\varepsilon_4 = \varepsilon_1\varepsilon_3 .$$

La seule valeur possible pour η^s est alors :

$$\eta^s = (-1)^{2s_1+2s_3} = (-1)^{2s_2+2s_4} . \qquad \text{(A.II.}$$

APPENDICE A.III

COHERENCE ENTRE LA "REGULARISATION" ET LE CROISEMENT

Nous avons défini dans le chapitre II des amplitudes d'hélicité "régulières" $\mathcal{F}$ dans la voie s et dans la voie t . Pour vérifier la cohérence entre la "régularisation" aux seuils et pseudo-seuils et le croisement, il suffit d'examiner le comportement de chaque élément de matrice au voisinage de chacune de ces singularités. Nous avons montré dans le chapitre IV que l'existence de pôles dans la matrice de croisement ne signifiait ni que la "régularisation" était fallacieuse ni que chaque amplitude d'hélicité devait s'annuler, et ceci nous a conduit à l'établissement des contraintes. Nous devons donc seulement prouver que chaque élément de la matrice de croisement entre amplitudes d'hélicité "regularisées" est uniforme à $S_{12} = 0$, $S_{34} = 0$, $T_{31} = 0$ et $T_{42} = 0$. Pour cela nous étudions d'abord les angles de croisement χ_i au voisinage des singularités, puis les propriétés des éléments de la matrice de croisement.

1) Singularités des fonctions trigonométriques des angles de croisement

Lorsque l'on tourne autour d'un point de branchement des fonctions S_{ij} (ou T_{ij}) , on voit immédiatement que $\cos\chi_i$, $\sin\chi_i$, $\cos\theta_s$ et $\sin\theta_s$ (ou $\cos\theta_t$ et $\sin\theta_t$) changent de signe, ce qui signifie que l'angle correspondant a été augmenté ou diminué de π . Nous allons montrer que ces changements ne sont pas indépendants.

A - Relations angulaires

a) Point de branchement à $S_{12} = 0$

A l'aide des définitions du tableau III_1 , nous pouvons calculer la quantité $\sin(\chi_1+\varepsilon\chi_2)$ où $\varepsilon = \pm 1$. On trouve :

$$S_{12}^2 T_{31} T_{42} \sin(\chi_1+\varepsilon\chi_2) = 2\sqrt{\Phi}\left[s-(m_1+\varepsilon m_2)^2\right]\left[t(m_1-\varepsilon m_2)+(m_2^2-m_4^2)m_1-\varepsilon m_2(m_1^2-m_3^2)\right] .$$

En se rappelant que $S_{12}^2 = \left[s-(m_1+m_2)^2\right]\left[s-(m_1-m_2)^2\right]$ on conclut que :

i) $\sin(\chi_1+\chi_2)$ n'a pas de pôle ni de zéro à $s=(m_1+m_2)^2$. Alors $\sin\frac{\chi_1+\chi_2}{2}$ et $\cos\frac{\chi_1+\chi_2}{2}$ n'ont pas de point de branchement à $\varphi_{12} = 0$, si bien que si on tourne autour du point $s=(m_1+m_2)^2$, $\chi_1 \to \chi_1 + \varepsilon_1\pi$ alors que $\chi_2 \to \chi_2 - \varepsilon_1\pi$ ($\varepsilon_1 = \pm 1$) .

ii) De même $\sin(\chi_1-\chi_2)$ n'a pas de pôle ni de zéro à $s=(m_1-m_2)^2$. Si on tourne autour du point de branchement $s=(m_1-m_2)^2$, nous voyons que χ_1 et χ_2 ont le même comportement.

Pour relier le comportement de θ_s à celui de χ_2 , nous calculons $\sin(\theta_s+\varepsilon\chi_2)$, $\varepsilon = \pm 1$. On trouve :

$$S_{12}^2 S_{34} T_{42} \sin(\theta_s+\varepsilon\chi_i) = 2\sqrt{\Phi}\,(\sqrt{s}+m_1+\varepsilon m_2)(\sqrt{s}-m_1+\varepsilon m_2)\left(\sqrt{s}(t-m_2^2-m_4^2)+\varepsilon m_2(s-m_3^2+m_4^2)\right) .$$

En se souvenant qu'on a choisi la détermination positive de la fonction $\sqrt{s}$ au-dessus de l'axe réel positif, on conclut :

$\sin(\theta_s-\chi_2)$ n'a pas de pôle à $s = (m_1+m_2)^2$

si $m_1 > m_2$ $\sin(\theta_s+\chi_2)$ n'a pas de pôle à $s = (m_1-m_2)^2$

si $m_2 > m_1$ $\sin(\theta_s-\chi_2)$ n'a pas de pôle à $s = (m_1-m_2)^2$.

b) Points de branchement à $S_{34} = 0$, $T_{31} = 0$, $T_{42} = 0$

Nous utilisons la même méthode. Les symbôles φ_{42}, Ψ_{42} , φ_{31} et Ψ_{31} sont définis dans la voie t comme φ_{12}, Ψ_{12}, φ_{34} et Ψ_{34} le sont dans la voie s . Tous les résultats sont contenus dans le tableau suivant qui donne la relation entre les comportements des différents angles quand on tourne autour d'un point de branchement donné :

$$
\begin{array}{llll}
\varphi_{12} & \text{si } \theta_s \to \theta_s+\varepsilon\pi & \text{alors} & \chi_1 \to \chi_2-\varepsilon\pi \;;\; \chi_2 \to \chi_2+\varepsilon\pi \\
\Psi_{12} & \text{si } \theta_s \to \theta_s+\varepsilon\pi & \text{alors} & \chi_1 \to \chi_1+\varepsilon\varepsilon_{12}\pi \;;\; \chi_2 \to \chi_2+\varepsilon\varepsilon_{12}\pi \\
\varphi_{34} & \text{si } \theta_s \to \theta_s+\varepsilon\pi & \text{alors} & \chi_3 \to \chi_3-\varepsilon\pi \;;\; \chi_4 \to \chi_4+\varepsilon\pi \\
\Psi_{34} & \text{si } \theta_s \to \theta_s+\varepsilon\pi & \text{alors} & \chi_3 \to \chi_3-\varepsilon\varepsilon_{34}\pi \;;\; \chi_4 \to \chi_4-\varepsilon\varepsilon_{34}\pi
\end{array}
\qquad \text{(A.III.1)}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\varphi_{42} & \text{si } \theta_t \to \theta_t+\varepsilon\pi & \text{alors} & \chi_4 \to \chi_4+\varepsilon\pi \;;\; \chi_2 \to \chi_2+\varepsilon\pi \\
\Psi_{42} & \text{si } \theta_t \to \theta_t+\varepsilon\pi & \text{alors} & \chi_4 \to \chi_4-\varepsilon\varepsilon_{42}\pi \;;\; \chi_2 \to \chi_2+\varepsilon\varepsilon_{42}\pi \\
\varphi_{31} & \text{si } \theta_t \to \theta_t+\varepsilon\pi & \text{alors} & \chi_3 \to \chi_3-\varepsilon\pi \;;\; \chi_1 \to \chi_1-\varepsilon\pi \\
\Psi_{31} & \text{si } \theta_t \to \theta_t+\varepsilon\pi & \text{alors} & \chi_3 \to \chi_3+\varepsilon\varepsilon_{31}\pi \;;\; \chi_1 \to \chi_1-\varepsilon\varepsilon_{31}\pi
\end{array}
\qquad \text{(A.III.2)}
$$

Nous rappelons que $\varepsilon_{ij} = \text{sign}\,(m_i-m_j)$ et $\varepsilon = \pm 1$.

2) Cohérence entre le croisement et la "régularisation"

Nous avons prouvé la cohérence pour tous les types de réaction. Pour ne pas alourdir démesurément cet appendice, nous reproduirons explicitement

la preuve seulement dans le cas d'une réaction entre quatre fermions de parité intrinsèque relative $\eta = +1$.

Soit $F^{i}_{\{\lambda\}}$ (ou $G^{i}_{\{\lambda\}}$) les amplitudes d'hélicité "régulières" de la voie s (ou de la voie t) . L'indice i varie de 1 à 2 . Les formules de "régularisation" (tableau II_4) et les relations de croisement (tableau III_1) permettent d'obtenir :

$$F^{1}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = \sum_{\{\lambda'\}} \left(C^{\lambda_3'\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2'}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} + \eta_{34}\, C^{\lambda_3'\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2'}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \right) \left[\varphi_{42}^{\Delta_{42}}\, \Psi_{42}\, \varphi_{31}^{\Delta_{31}}\, \Psi_{31}\, G^{1}_{\lambda_3'\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2'} \right.$$

$$\left. + \varphi_{42}\Psi_{42}^{\Delta_{42}}\, \varphi_{31}\Psi_{31}^{\Delta_{31}}\, G^{2}_{\lambda_3'\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2'} \right] \qquad \text{(A.III.3)}$$

où

$$C^{\lambda_3'\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2'}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = e^{i\pi(\lambda_2-\lambda_3)}\, \eta^{s}\, (-1)^{\sigma(P)}\, \frac{\sin^{\theta_t}_{\frac{2}{}}{}^{|\lambda'-\mu'|}\, \cos^{\theta_t}_{\frac{2}{}}{}^{|\lambda'+\mu'|}}{\sin^{\theta_s}_{\frac{2}{}}{}^{|\lambda-\mu|}\, \cos^{\theta_s}_{\frac{2}{}}{}^{|\lambda+\mu|}}\, \frac{\sqrt{s}^{|\lambda|+|\mu|}}{\sqrt{t}^{|\lambda'|+|\mu'|}} \times$$

$$\times \frac{S_{12}^{\bar{m}_{12}}\, S_{34}^{\bar{m}_{34}}\, \Psi_{12}^{\Delta_{12}^{-1}}\, \Psi_{34}^{\Delta_{34}^{-1}}}{T_{42}^{m^{+}_{42}}\, T_{31}^{m^{+}_{31}}} \prod_i d^{s_i}(\chi_i)^{\lambda_i'}_{\lambda_i}$$

$$\lambda' = \lambda_4' - \lambda_2' \quad ; \quad \mu' = \lambda_3' - \lambda_1' \qquad m_{42} = s_4 + s_2 - \mathrm{Max}(|\lambda'|, |\mu'|) \ ,$$

$$m_{31} = s_3 + s_1 - \mathrm{Max}(|\lambda'|, |\mu'|) \quad \text{et} \quad \Delta_{ij} = m^{+}_{ij} - m^{-}_{ij} \ . \qquad \text{(A.III.4)}$$

A - Points de branchement à $S_{34} = 0$

La seule quantité apparaissant dans la relation (A.III.3) , qui

soit singulière à $S_{34}=0$, est $C^{\{\lambda'\}}_{\{\lambda\}}$. Donc nous devons montrer que la combinaison $C^{\{\lambda'\}}_{\lambda_f;\lambda_i} + \eta_{34}\, C^{\{\lambda'\}}_{-\lambda_f;\lambda_i}$ est uniforme à $\varphi_{34}=0$ et à $\Psi_{34}=0$.

a) Point de branchement à $\varphi_{34}=0$

A l'aide des relations (A.III.1) , on connaît le comportement des termes singuliers de $C^{\{\lambda\}}_{\{\lambda'\}}$ lorsqu'on tourne autour du point $s=(m_3+m_4)^2$

$\sin^{|\lambda-\mu|}\frac{\theta}{2}\ \cos^{|\lambda+\mu|}\frac{\theta}{2}$ se change en $\sin^{|\lambda+\mu|}\frac{\theta}{2}\ \cos^{|\lambda-\mu|}\frac{\theta}{2}\ (-1)^{\lambda+\varepsilon\mu}$

$d^{s_3}(\chi_3)^{\lambda'_3}_{\lambda_3}\ d^{s_4}(\chi_4)^{\lambda'_4}_{\lambda_4}$ se change en $d^{s_3}(\chi_3)^{\lambda'_3}_{-\lambda_3}\ d^{s_4}(\chi_4)^{\lambda'_4}_{-\lambda_4}\ (-1)^{s_3+s_4-\varepsilon\mu}$.

D'autre part $e^{i\pi(\lambda_2-\lambda_3)} = (-1)^{2s_3}\ e^{i\pi(\lambda_2+\lambda_3)}$;

On trouve donc : $C^{\{\lambda'\}}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\varphi_{34}) = (-1)^{s_3-s_4-\lambda}\ C^{\{\lambda'\}}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\varphi_{34}) =$

$$\eta_{34}\ C^{\{\lambda'\}}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\varphi_{34})$$

puisque $(-1)^{s_3-s_4} = (-1)^{s_4-s_3}$ dans ce cas $(FF \to FF)$

Ceci nous prouve que la combinaison $C^{\{\lambda'\}}_{\lambda_f;\lambda_i} + \eta_{34}\, C^{\{\lambda'\}}_{-\lambda_f;\lambda_i}$ est bien uniforme.

b) Point de branchement à $\Psi_{34}=0$

De la même manière, si l'on tourne autour du point $\Psi_{34}=0$, on observe que :

$\sin\frac{\theta}{2}^{|\lambda-\mu|}\ \cos\frac{\theta}{2}^{|\lambda+\mu|}$ se change en $\sin\frac{\theta}{2}^{|\lambda+\mu|}\ \cos\frac{\theta}{2}^{|\lambda-\mu|}\ (-1)^{\lambda+\varepsilon\mu}$

$d^{s_3}(\chi_3)^{\lambda_3'}_{\lambda_3}\ d^{s_4}(\chi_4)^{\lambda_4'}_{\lambda_4}$ se change en $d^{s_3}(\chi_3)^{\lambda_3'}_{-\lambda_3}\ d^{s_4}(\chi_4)^{\lambda_4'}_{-\lambda_4}\ (-1)^{s_3+s_4-\varepsilon\varepsilon_{34}(\lambda_3+\lambda_4)}$

et $\Psi_{34}^{\Delta_{34}-1}$ se change en $-\Psi_{34}^{\Delta_{34}-1}$.

Alors on trouve :

$$C^{\{\lambda'\}}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(-\Psi_{34}) = -(-1)^{s_4-s_3+\lambda}\ (-1)^{\lambda_3(1+\varepsilon_{34})+\lambda_4(1-\varepsilon_{34})}\ C^{\{\lambda'\}}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}(\Psi_{34}) .$$

Puisque $(-1)^{2\lambda_3} = (-1)^{2\lambda_4} = -1$, la phase ci-dessus est indépendante de ε_{34} et vaut encore η_{34} .

B - Points de branchement à $S_{12} = 0$

Dans l'équation (A.III.3) , on peut remplacer $\eta_{34}\ C^{\{\lambda'\}}_{-\lambda_3-\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ par $\eta_{12}\ C^{\{\lambda'\}}_{\lambda_3\lambda_4;-\lambda_1-\lambda_2}$. On peut répéter le même argument en remplaçant les indices 3 et 4 par les indices 1 et 2 .

C - Points de branchement à $T_{31} = 0$

Dans l'équation (A.III.3) , on peut remplacer :

$\sum_{\lambda_3'\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2'}$ par $\frac{1}{2}\left[\sum_{\lambda_3'\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2'} + \sum_{-\lambda_3'-\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2'}\right]$ puisque les indices λ_i' sont

muets. Si on utilise l'équation (II.26) pour les fonctions $G^{i}_{\{\lambda'\}}$, c'est-à-dire :

$$G^{1}_{\lambda_3'\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2'} = \eta_{31}\, G^{1}_{-\lambda_3'-\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2'}$$

et $$G^{2}_{\lambda_3'\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2'} = -\eta_{31}\, G^{2}_{-\lambda_3'-\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2'}$$

avec $$\eta_{31} = (-1)^{s_3-s_1+\lambda'}$$

On obtient :

$$F^{1}_{\lambda_f;\lambda_i} = \frac{1}{2}\sum_{\{\lambda'\}}\left\{ C^{\lambda_f';\lambda_i'}_{\lambda_f;\lambda_i} + \eta_{31}\, C^{-\lambda_f';\lambda_i'}_{\lambda_f;\lambda_i} + \eta_{34}\left[C^{\lambda_f';\lambda_i'}_{-\lambda_f;\lambda_i} + \eta_{31}\, C^{-\lambda_f';\lambda_i'}_{-\lambda_f;\lambda_i}\right]\right\}$$

$$\times\ \overset{\Delta_{42}}{\varphi_{42}}\ \Psi_{42}\ \overset{\Delta_{31}}{\varphi_{31}}\ \Psi_{31}\ G^{1}_{\lambda_f';\lambda_i'}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\{\lambda'\}}\left\{ C^{\lambda_f';\lambda_i'}_{\lambda_f;\lambda_i} - \eta_{31}\, C^{-\lambda_f';\lambda_i'}_{\lambda_f;\lambda_i} + \eta_{34}\left[C^{\lambda_f';\lambda_i'}_{-\lambda_f;\lambda_i} - \eta_{31}\, C^{-\lambda_f';\lambda_i'}_{-\lambda_f;\lambda_i}\right]\right\}$$

$$\times\ \varphi_{42}\ \overset{\Delta_{42}}{\Psi_{42}}\ \varphi_{31}\ \overset{\Delta_{31}}{\Psi_{31}}\ G^{2}_{\lambda_f';\lambda_i'}$$

où $C^{\lambda_f';\lambda_i'}_{\lambda_f;\lambda_i}$ est une abréviation de $C^{\lambda_3'\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2'}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$.

a) Point de branchement à $\varphi_{31} = 0$

Etudions le comportement de $C^{\lambda_f';\lambda_i'}_{\lambda_f;\lambda_i}$ quand on tourne autour

du point $t=(m_3+m_1)^2$. On observe que :

$\sin\frac{\theta_t}{2}^{|\lambda'-\mu'|}\ \cos\frac{\theta_t}{2}^{|\lambda'+\mu'|}$ se change en $\sin\frac{\theta_t}{2}^{|\lambda'+\mu'|}\ \cos\frac{\theta_t}{2}^{|\lambda'-\mu'|}\ (-1)^{\lambda'+\varepsilon\mu'}$

et que $d^{s_1}(\chi_1)^{\lambda'_1}_{\lambda_1}\ d^{s_2}(\chi_2)^{\lambda'_2}_{\lambda_2}$ se change en $d^{s_1}(\chi_1)^{-\lambda'_1}_{\lambda_1}\ d^{s_3}(\chi_3)^{-\lambda'_3}_{\lambda_3}\ (-1)^{s_1+s_3-\varepsilon(\lambda$

On en déduit : $C^{\lambda'_f;\lambda'_i}_{\lambda_f;\lambda_i}(-\varphi_{31}) = \eta_{31}\ C^{-\lambda'_f;\lambda'_i}_{\lambda_f;\lambda_i}$ (pour ce cas de spin)

et si l'on considère les deux fonctions $X^{\pm}_{\lambda_f;\lambda_i} = C^{\lambda'_f;\lambda'_i}_{\lambda_f;\lambda_i} \pm \eta_{31}\ C^{-\lambda'_f;\lambda'_i}_{\lambda_f;\lambda_i}$,

on a : $$X^{\pm}_{\lambda_f;\lambda_i}(-\varphi_{31}) = \pm\, X^{\pm}_{\lambda_f;\lambda_i}(\varphi_{31}) \ .$$

Les coefficients de $G^1_{\lambda'_f;\lambda'_i}$ et $G^2_{\lambda'_f;\lambda'_i}$ sont donc bien uniformes à $t=(m_3+m_1)^2$.

b) Point de branchement à $\Psi_{31}=0$

Le même procédé nous permet de vérifier que le comportement des fonctions $X^{\pm}_{\lambda_f;\lambda_i}$ est indépendant de ε_{31} et que de plus :

$$X^{\pm}_{\lambda_f;\lambda_i}(-\Psi_{31}) = \mp\, X^{\pm}_{\lambda_f;\lambda_i}(\Psi_{31}) \ .$$

Les coefficients de $G^1_{\lambda'_f;\lambda'_i}$ et $G^2_{\lambda'_f;\lambda'_i}$ sont donc bien uniformes à $t=(m_3-m_1)^2$.

D - Points de branchement à $T_{42}=0$

Nous pouvons remplacer $\sum_{\lambda'_3\lambda'_1;\lambda'_4\lambda'_2}$ par $\frac{1}{2}\left[\sum_{\lambda'_3\lambda'_1;\lambda'_4\lambda'_2} + \sum_{\lambda'_3\lambda'_1;-\lambda'_4-\lambda'_2}\right]$

dans l'équation (A.III.3) . On utilise alors les équations II.26 :

$$G^1_{\lambda_3'\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2'} = \eta_{42}\ G^1_{\lambda_3'\lambda_1';-\lambda_4'-\lambda_2'}$$

et $$G^2_{\lambda_3'\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2'} = -\eta_{42}\ G^2_{\lambda_3'\lambda_1';-\lambda_4'-\lambda_2'} \quad .$$

Le raisonnement précédent est valable si on remplace les indices 3 et 1 par les indices 4 et 2 .

3) Conclusion

Naturellement, on démontrerait de même que les éléments de matrice reliant $F^2_{\lambda_f;\lambda_i}$ à $G^1_{\lambda_f';\lambda_i'}$ et $G^2_{\lambda_f';\lambda_i'}$ sont uniformes. Les autres configurations se traitent de la même manière. Nous n'avons pas reproduit ici tous ces calculs fastidieux d'autant plus qu'une preuve plus directe peut être obtenue à partir des transversités (voir § IV.C.b) .

APPENDICE A.IV

CAS PARTICULIERS : CONTRAINTES A $s = 0$

A - Cas $m_1 = m_2$; $m_3 \neq m_4$

Les conclusions au sujet des comportements de l'amplitude de transversité $T^s_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}$ au voisinage de $\varphi_{12} = 0$, $\varphi_{34} = 0$ et $\Psi_{34} = 0$ sont celles du cas général. Le comportement au pseudo-seuil Ψ_{12} nécessite une étude particulière car les masses initiales sont égales. Une contrainte à $s = 0$ apparaît car la fonction Ψ_{12} se confond avec la fonction $\sqrt{s}$.

Au voisinage de $s = 0$, les quantités $\cos(\chi_1+\chi_2)$ et $\sin(\chi_1+\chi_2)$ se comporte comme $\frac{1}{s}$. De plus l'étude faite dans l'appendice A.I nous montre que :

$$\sqrt{s}^{\,2s_i}\ \hat{M}^s_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} = a + b\sqrt{s} \quad ,$$

où a et b sont des fonctions "régulières" à $s = 0$. On en déduit que la fonction $\sqrt{s}^{\,2s_i}\ M^s_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ est également de la forme $a' + b'\sqrt{s}$ où les fonctions a' et b' sont "régulières" à $s = 0$. La fonction $\sqrt{s}^{\,2s_i}\ T^s_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}$ est donc "finie" à $s = 0$.

D'après la formule de croisement (IV.6) , on sait que l'amplitude $T^s_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}$ se comporte comme :

$$e^{-i(\chi_1+\chi_2)\,\frac{(\tau_1-\tau_2)}{2}}$$

au voisinage de $s = 0$. D'autre part $e^{i(\chi_1+\chi_2)}$ se comporte comme $\frac{1}{(s)^{\pm 1}}$ au voisinage de $s = 0$, si la fonction $\sqrt{\Phi(s,t)}$ vaut $\pm i m_1(m_3^2 - m_4^2)$ à $s = 0$.

Conclusion

Au voisinage de $s = 0$ $\sqrt{s}^{2s_i} \; T^s_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2} \simeq \sqrt{s}^{2s_i \pm (\tau_1-\tau_2)}$

(A.IV.1)

si $\sqrt{\Phi(s,t)} = \pm i m_1(m_3^2 - m_4^2)$ à $s = 0$.

B - Cas $m_3 = m_4$; $m_1 \neq m_2$

On obtient le même genre de résultat :

a) la fonction Ψ_{34} se confond avec la fonction $\sqrt{s}$.

b) la fonction $\sqrt{s}^{2s_f} \; T^s_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}$ est "finie" à $s = 0$.

c) $e^{i(\chi_3+\chi_4)}$ se comporte comme $\frac{1}{s^{\pm 1}}$ si $\sqrt{\Phi(s,t)} = \pm i m_3(m_1^2 - m_2^2)$ à $s = 0$

Conclusion

$$\sqrt{s}^{2s_f} \; T^s_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2} \simeq \sqrt{s}^{2s_f \pm (\tau_3-\tau_4)}$$

(A.IV.2)

si $\sqrt{\Phi(s,t)} = \pm i m_3(m_1^2 - m_2^2)$ à $s = 0$.

C - $m_1 = m_2$; $m_3 = m_4$

Dans ces cas les fonctions Ψ_{12} et Ψ_{34} coïncident avec la fonction $\sqrt{s}$. De plus la singularité $s = 0$ apparaît simultanément dans les fonctions $\cos\chi_1$, $T^s_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2}$ et $T^t_{-\tau_3-\tau_1;-\tau_4-\tau_2}$. C'est pour cette raison qu'il est plus simple d'étudier les contraintes à $s = 0$ à l'aide du croisement des amplitudes d'hélicité.

Dans le cas présent, les fonctions qui apparaissent dans le tableau III_1 se réduisent à :

$$\begin{cases} \cos\chi_1 = -\cos\chi_2 = -\dfrac{\sqrt{-s}(t+m_1^2-m_3^2)}{T_{13}\sqrt{4m_1^2-s}} \quad ; \quad \sin\chi_1 = \sin\chi_2 = \dfrac{2m_1\sqrt{T_{13}^2+st}}{T_{13}\sqrt{4m_1^2-s}} \\ \cos\chi_3 = -\cos\chi_4 = \dfrac{\sqrt{-s}(t+m_3^2-m_1^2)}{T_{13}\sqrt{4m_3^2-s}} \quad ; \quad \sin\chi_1 = \sin\chi_4 = -\dfrac{2m_3\sqrt{T_{13}^2+st}}{T_{13}\sqrt{4m_3^2-s}} \end{cases}$$

L'amplitude d'hélicité $M^t_{\lambda_3'\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2'} = \sin\frac{\theta_t}{2}^{|\lambda'-\mu'|} \cos\frac{\theta_t}{2}^{|\lambda'+\mu'|} \hat{M}^t_{\lambda_3'\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2'}$

se comporte comme $\sqrt{-s}^{|\lambda'-\mu'|}$ au voisinage de $s = 0$. En effet on a dans ce cas la relation $\sin\frac{\theta_t}{2} = \frac{\sqrt{t}\sqrt{-s}}{T_{13}}$.

De plus on sait (voir appendice A.I) que l'amplitude d'hélicité $M^s_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2}$ se comporte comme $\sqrt{s}^{\varepsilon}$ où $\begin{cases} \varepsilon = +1 & \text{si } \eta(-1)^{\sum\lambda_i} = -1 \\ \varepsilon = 0 & \text{si } \eta(-1)^{\sum\lambda_i} = 1 \end{cases}$.

La relation de croisement inverse permet d'écrire :

$$M^{t}_{\lambda_3'\lambda_1';\lambda_4'\lambda_2'} = (-1)^{\sigma(P)} (-1)^{2s_2+2s_4} e^{-i\pi(\lambda_2'-\lambda_3')} \sum_{\{\lambda\}} d^{s_1}(-\chi_1)^{\lambda_1}_{\lambda_1'} d^{s_2}(\chi_2)^{\lambda_2}_{\lambda_2'}$$

$$d^{s_3}(\chi_3)^{\lambda_3}_{\lambda_3'} d^{s_4}(\chi_4)^{\lambda_4}_{\lambda_4'} M^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \quad .$$

Conclusion

$$\sum_{\{\lambda\}} d^{s_1}(-\chi_1)^{\lambda_1}_{\lambda_1'} d^{s_2}(\chi_2)^{\lambda_2}_{\lambda_2'} d^{s_3}(\chi_3)^{\lambda_3}_{\lambda_3'} d^{s_4}(-\chi_4)^{\lambda_4}_{\lambda_4'} M^{s}_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \simeq \sqrt{s}^{\,|\lambda'-\mu'|}$$

où $\lambda' = \lambda_4' - \lambda_2'$ et $\mu' = \lambda_3' - \lambda_1'$.

APPENDICE A.V

EXEMPLES

Dans cet appendice nous vérifions sur des exemples tous les résultats que nous avons obtenus. Cette vérification peut se faire lorsqu'on connaît directement les relations entre les amplitudes d'hélicité et les amplitudes invariantes qui par hypothèse obéissent à la représentation de Mandelstam . C'est le cas par exemple des réactions $0^- + \frac{1}{2}^+ \to 0^- + \frac{1}{2}^+$ et de la réaction élastique nucléon-antinucléon → nucléon-antinucléon.

1) Vérification de la "régularisation" des amplitudes d'hélicité

A - Cas général de masse

a) Réactions $\frac{1}{2}^+ + 0^- \to \frac{1}{2}^+ + 0^-$ $\quad \eta = +1$

Les amplitudes d'hélicité s'expriment en fonction des deux amplitudes invariantes habituelles A et B par la relation :

$$M_{\lambda_3 0;\lambda_1 0} = \bar{u}(p_3)^{\lambda_3} \left[A + \frac{B}{2} \gamma(p_2 + p_4) \right] u_{\lambda_1}(p_1)$$

où $$u_{\lambda_i}(p_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} D^{\frac{1}{2}} (L_{12}(i))^{\cdot}_{\lambda} \\ D^{\frac{1}{2}} (L_{12}^{\dagger -1}(i))^{\cdot}_{\lambda} \end{pmatrix}$$

est un spineur à quatre composantes.

et $\bar{u}^{\lambda}(p_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(D^{\frac{1}{2}} (L_{12}^{-1}(i))^{\lambda}_{\cdot} \; ; \; D^{\frac{1}{2}} (L^{\dagger}(i))^{\lambda}_{\cdot} \right)$.

Nous obtenons après quelques calculs :

$$M_{\frac{1}{2}0;\frac{1}{2}0} = \frac{\cos\frac{\theta_s}{2} \left\{ [(\omega_1+m_1)(\omega_3+m_3)-pk][A-B(\frac{m_1+m_3}{2})] + B\sqrt{s}\,[(\omega_1+m_1)(\omega_3+m_3)+pk] \right\}}{\sqrt{2m_1\ 2m_3(\omega_1+m_1)(\omega_3+m_3)}}$$

$$= M_{-\frac{1}{2}0;\frac{1}{2}0} \qquad \text{(Invariance par parité)}$$

(A.V.1)

et :

$$M_{\frac{1}{2}0;-\frac{1}{2}0} = \frac{\sin\frac{\theta_s}{2} \left\{ [(\omega_1+m_1)(\omega_3+m_3)+pk][A-B(\frac{m_1+m_3}{2})] + B\sqrt{s}\,[(\omega_1+m_1)(\omega_3+m_3)-pk] \right\}}{\sqrt{2m_1\ 2m_3\ (\omega_1+m_1)(\omega_3+m_3)}}$$

$$= M_{-\frac{1}{2}0;\frac{1}{2}0} \qquad \text{(Invariance par parité)} .$$

Dans le cas de l'amplitude $M_{\frac{1}{2}0;\frac{1}{2}0}$ on a :

$$\lambda = \tfrac{1}{2} \; ; \; \mu = \tfrac{1}{2} \; ; \; \eta_{12} = +1 \; ; \; \eta_{34} = -1 \; ; \; m_{12} = 0 \text{ et } m_{34} = 0 .$$

L'équation (II.17) nous permet d'écrire :

$$\mathcal{A}_{34} = \mathcal{A}_{12} = \frac{2(\omega_1+m_1)(\omega_3+m_3)\left[A+B\,(\sqrt{s}-(\frac{m_1+m_3}{2}))\right]}{\sqrt{2m_1\ 2m_3\ (\omega_1+m_1)(\omega_3+m_3)}}$$

$$\mathcal{B}_{34} = \mathcal{B}_{12} = \frac{2pk\left[-A+B\left(\sqrt{s}+\left(\frac{m_1+m_3}{2}\right)\right)\right]}{\sqrt{2m_1\ 2m_3\ (\omega_1+m_1)(\omega_3+m_3)}} \quad .$$

On vérifie directement dans le cas $m_1 > m_2$ et $m_3 > m_4$ que :

$F^1_{\frac{1}{2}0;\frac{1}{2}0} = \sqrt{s}\ \mathcal{A}_{34}$ et $F^2_{\frac{1}{2}0;\frac{1}{2}0} = \sqrt{s}\ S^{-1}_{12}\ S^{-1}_{34}\ \mathcal{B}_{34}$ sont deux fonctions sans singularités cinématiques à l'exception de la singularité $\sqrt{s}$ qui apparaît dans toute réaction Boson-Fermion → Boson-Fermion.

Les autres cas d'inégalité entre masses se traitent de la même manière. La vérification se fait en remarquant que la fonction $\sqrt{\omega_i+m_i}$ est singulière au pseudo-seuil si $m_i < m_j$.

b) Réactions $0^- + 0^- \to \frac{1}{2}^+ + \overline{\frac{1}{2}^+}$ $\quad \eta = -1$

Utilisant à nouveau les deux amplitudes invariantes A et B, on peut écrire :

$$M_{\lambda_3\lambda_4;00} = \bar{u}^{\lambda_3}(p_3)\left[A + \frac{B}{2}\gamma\ (p_2 - p_1)\right] v_{\lambda_4}\ (p_4)$$

où $$v_\lambda(p_i) = \begin{pmatrix} D^{\frac{1}{2}}\ (L_{12}(i)\varepsilon)^{\cdot}_{\lambda} \\ \\ D^{\frac{1}{2}}\ (L^{\dagger-1}_{12}(i)\varepsilon^{-1})^{\cdot}_{\lambda} \end{pmatrix} \quad .$$

Nous en déduisons :

$$M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};00} = \frac{Ap(\omega_3+m_3+\omega_4+m_4) - \frac{B}{2}(\omega_1-\omega_2)(\omega_3+m_3-\omega_4-m_4) - Bk\cos\theta_s\left[(\omega_3+m_3)(\omega_4+m_4)-p^2\right]}{\sqrt{2m_3\ 2m_4\ (\omega_3+m_3)(\omega_4+m_4)}}$$

$$= -M_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2};00} \qquad \text{(A.V.2)}$$

et
$$M_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};00} = \frac{Bk\sin\theta_s\left[(\omega_3+m_3)(\omega_4+m_4)+p^2\right]}{\sqrt{2m_3\ 2m_4(\omega_3+m_3)(\omega_4+m_4)}}$$

$$= M_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2};00} \ .$$

Remarquons les identités suivantes :

$$(\omega_3+m_3)^{\frac{1}{2}}(\omega_4+m_4)^{\frac{1}{2}} + (\omega_3-m_3)^{\frac{1}{2}}(\omega_4-m_4)^{\frac{1}{2}} = \Psi_{34}$$

$$(\omega_3+m_3)^{\frac{1}{2}}(\omega_4+m_4)^{\frac{1}{2}} - (\omega_3-m_3)^{\frac{1}{2}}(\omega_4-m_4)^{\frac{1}{2}} = \Psi_{34}\frac{m_3+m_4}{\sqrt{s}}$$

$$(\omega_3+m_3)^{\frac{1}{2}}(\omega_4-m_4)^{\frac{1}{2}} + (\omega_3-m_3)^{\frac{1}{2}}(\omega_4+m_4)^{\frac{1}{2}} = \varphi_{34}$$

et
$$(\omega_3+m_3)^{\frac{1}{2}}(\omega_4-m_4)^{\frac{1}{2}} - (\omega_3-m_3)^{\frac{1}{2}}(\omega_4+m_4)^{\frac{1}{2}} = \varphi_{34}\frac{m_3-m_4}{\sqrt{s}} \ .$$

Alors les relations A.V.2 s'écrivent :

$$M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};00} = -\frac{1}{\sqrt{4m_3m_4}}\left[-A\,\varphi_{34} + \frac{B}{2}(m_1^2-m_2^2)(m_3-m_4)\frac{\varphi_{34}}{s} + \frac{B\,\Psi_{34}S_{12}\cos\theta_s}{2s}(m_3+m_4)\right]$$

et $M_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};00} = + \dfrac{B\, S_{12}\, \sin\theta_s\, \Psi_{34}}{2\sqrt{s}\,\sqrt{4m_3 m_4}}$.

Pour l'amplitude $M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};00}$ donc pour $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\eta_{12} = \eta_{34} = +1$,

on a $m_{12} = 0$ et $m_{34} = +1$ et :

$$\mathcal{A}_{34} = \mathcal{B}_{12} = 0 \quad ; \quad \mathcal{B}_{34} = \mathcal{A}_{12} = 2\,\hat{M}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};00} \ .$$

On vérifie alors que :

$$F^1_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};00} = \varphi_{34}\,\mathcal{B}_{34} = -\frac{1}{\sqrt{m_3 m_4}}\left[-A\,\varphi^2_{34} + \frac{B}{2}\left[(t-u)(m_3+m_4)+(m_1^2-m_2^2)(m_3-m_4)\right]\right]$$

est une fonction "régulière" .

D'autre part pour l'amplitude $M_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};00}$ donc pour $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $\eta_{12} = -1$,

$\eta_{34} = +1$,

on a : $m_{12} = -1$ et $m_{34} = 0$

et : $\mathcal{A}_{34} = \mathcal{B}_{12} = 2\,\hat{M}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};00}$ $\mathcal{B}_{34} = \mathcal{A}_{34} = 0$.

On vérifie alors que : $F^2_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};00} = \sqrt{s}\ \ S^{-1}_{12}\ \ \Psi^{-1}_{34}\ \ \mathcal{A}_{34} = \dfrac{B}{\sqrt{m_3 m_4}}$ est une

fonction "régulière" .

Ces résultats sont en accord avec le tableau II_4 $\quad B\bar{B} \to F\bar{F} \quad \eta = -1$.

B - Cas particulier de masse

a) $m_1 = m_3$; $m_2 = m_4$, $m_1 \neq m_2$ (Par exemple la réaction π N élastique)

En tenant compte des relations $m_1 = m_3$; $m_2 = m_4$ dans l'équation A.V.1 , on obtient :

$$M_{\frac{1}{2}0\,;\frac{1}{2}0} = \cos\frac{\theta_s}{2}\left[A+B\left(\frac{s-m_1^2-m_2^2}{2}\right)\right]$$

et $M_{\frac{1}{2}0\,;-\frac{1}{2}0} = \sin\frac{\theta_s}{2}\left[A\,\frac{E}{m_1} + B\,\omega\right]$ avec $\omega = \omega_2 = \omega_4$ et $E = \omega_1 = \omega_3$.

On vérifie alors que les deux fonctions $\hat{M}_{\frac{1}{2}0\,;\frac{1}{2}0} = A+B\,\frac{s-m_1^2-m_2^2}{2}$ et

$\sqrt{s}\;\hat{M}_{\frac{1}{2}0\,;-\frac{1}{2}0} = \frac{1}{2}\left[\frac{A}{m_1}(s+m_1^2-m_2^2) + B(s+m_2^2-m_1^2)\right]$ sont "régulières", ce qui est en accord avec le tableau II_8 .

b) Cas $m_1 = m_2$; $m_3 \neq m_4$ pour la réaction $0^- + 0^- \to \frac{1}{2}^+ + \frac{1}{2}^+$ $\eta = -1$

En tenant compte des relations $m_1 = m_2 = m$ dans les équations A.V.2, on obtient : $M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};00} = -\frac{1}{\sqrt{4m_3m_4}}\left[-A\,\varphi_{34} + B\,\Psi_{34}\,\frac{\sqrt{s-4m^2}}{\sqrt{s}}\,\cos\theta_s\,(m_3+m_4)\right]$,

et $M_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};00} = +\,\frac{B\sqrt{s-4m^2}\,\sin\theta_s\,\Psi_{34}}{\sqrt{4m_3m_4}}$.

Pour l'amplitude $M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};00}$, $\sum_i \lambda_i$ est impair , $m_{12} = 0$, $m_{34} = 1$ et $\eta_{12} = 1$

et pour l'amplitude $M_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};00}$, $\sum_i \lambda_i$ est pair , $m_{12} = -1$, $m_{34} = 0$ et $\eta_{12} = -1$;

on vérifie alors que les fonctions :

$$\varphi_{34} M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};00} = -\frac{1}{\sqrt{4m_3m_4}} \left[-A(s-(m_3+m_4)^2) + \frac{B}{2}(t-u)(m_3+m_4) \right] ,$$

et $$\frac{M_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};00}}{\sin\theta_s \Psi_{34}\sqrt{s-4m^2}} = \frac{B}{\sqrt{4m_3m_4}}$$ sont "régulières", ce qui est en accord avec le tableau II_6 .

c) Cas $m_1 = m_2 = m$; $m_3 = m_4 = m'$ (Réaction $\pi\pi \to N\bar{N}$) $\eta = -1$

En tenant compte des relations $m_1 = m_2$ et $m_3 = m_4$ dans l'équation A.V.2 on obtient : $M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};00} = \frac{p}{m'} A - k\cos\theta_s B$

et : $$M_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};00} = \frac{k\sqrt{s}}{2m'} \sin\theta_s B .$$

On vérifie que les deux fonctions $p\, M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};00} = \frac{p^2}{m'} A - \frac{B}{4}(t-u)$ et

$$\frac{M_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};00}}{\sqrt{s}\, k \sin\theta_s} = \frac{B}{2m'}$$ sont "régulières", ce qui est en accord avec le tableau II_9 .

d) $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$ (Réaction Nucléon-Antinucléon élastique)

Volkov et Gribov[17] ont écrit les cinq amplitudes d'hélicité indépendantes en fonction des cinq amplitudes invariantes H_i ($i = 1$ à 5) plus connues sous le nom d'amplitudes scalaire , vecteur , tenseur , pseudo-vecteur et pseudo-scalaire .

$$M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 4p^2H_1 - 4m^2\cos\theta_s H_2 - 4m^2\cos\theta_s H_3 - 4m^2 H_4 - s\,H_5$$

$$M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = -4p^2H_1 + 4m^2\cos\theta_s H_2 + 4\left(\frac{s}{4}+p^2\right)\cos\theta_s H_3 - 4m^2 H_4 - s\,H_5$$

$$\frac{M_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}}{(1+\cos\theta_s)} = -s\,H_2 - 4m^2 H_3 + 4p^2 H_4$$

$$\frac{M_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}}{(1-\cos\theta_s)} = s\,H_2 + 4m^2 H_3 + 4p^2 H_4$$

et :

$$\frac{M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{s}\,\sin\theta_s} = -2m\left[H_2 + H_3\right] .$$

On vérifie alors que les fonctions $p^2\,M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, $p^2\,M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$, $\left(\cos^2\frac{\theta_s}{2}\right)^{-1} M_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$, $\left(\sin^2\frac{\theta_s}{2}\right)^{-1} M_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ et $\sqrt{s}^{-1}\sin\theta_s^{-1}\, M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$ sont "régulières", ce qui est en accord avec le tableau II_{10} .

2) Vérification de la formule de croisement pour la diffusion πN

La relation de croisement entre les amplitudes d'hélicité de la voie s $(N_1\pi_2 \to N_3\pi_4)$ et de la voie t $(\pi_4\pi_2 \to N_3\bar{N}_1)$ s'écrit :

$$M^{s}_{\lambda_3 0;\lambda_1 0}(s,t,u) = e^{-i\pi\lambda_3} \sum_{\lambda_1'\lambda_3'} d^{1/2}(\chi_1)^{\lambda_1'}_{\lambda_1}\, d^{1/2}(\chi_3)^{\lambda_3'}_{\lambda_3}\, M^{t}_{\lambda_3'\lambda_1';00}(s,t,u)$$

avec : $\cos\chi_1 = -\dfrac{(s+m^2-m'^2)t}{S\,T}$ $\qquad \sin\chi_1 = \dfrac{2m\sqrt{\Phi}}{S\,T}$

$\cos\chi_3 = -\cos\chi_1$ $\qquad \sin\chi_3 = -\sin\chi_1$

$$S = S_{12} = S_{34} \quad ; \quad T = T_{31} = \sqrt{t(t-4m^2)} \quad .$$

La fonction T est négative dans la région physique de la voie s . Si bien que l'angle χ_1 est négatif ; donc l'angle χ_3 vaut $\chi_3 + \pi$.

En tenant compte des relations dues à l'invariance par parité :

$$M^{s}_{\frac{1}{2}0;\frac{1}{2}0} = M^{s}_{-\frac{1}{2}0;-\frac{1}{2}0} \quad ; \quad M^{s}_{\frac{1}{2}0;-\frac{1}{2}0} = -M^{s}_{-\frac{1}{2}0;\frac{1}{2}0}$$

$$M^{t}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};00} = -M^{t}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2};00} \quad ; \quad M^{t}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};00} = M^{t}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2};00} \quad ,$$

les relations de croisement s'écrivent :

$$\begin{cases} M^{s}_{\frac{1}{2}0;\frac{1}{2}0} = i\left[\sin\chi_1\, M^{t}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};00} - \cos\chi_1\, M^{t}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};00}\right] \\ M^{s}_{\frac{1}{2}0;-\frac{1}{2}0} = i\left[\cos\chi_1\, M^{t}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};00} + \sin\chi_1\, M^{t}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};00}\right] \end{cases} .$$

La vérification de ces relations peut se faire en éliminant les amplitudes invariantes A et B entre les équations qui donnent $M^{s}_{\lambda_3 0;\lambda_1 0}$ et $M^{t}_{\lambda_3'\lambda_1';00}$ (voir paragraphe précédent).

On obtient : $$M^{s}_{\frac{1}{2}0;\frac{1}{2}0} = \frac{m}{p_t}\cos\frac{\theta_s}{2}\, M^{t}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};00} - \frac{E_s \sin\frac{\theta_s}{2}}{p_t}\, M^{t}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};00}$$

$$M^{s}_{\frac{1}{2}0;-\frac{1}{2}0} = \frac{E_s}{p_t}\sin\frac{\theta_s}{2}\, M^{t}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};00} + \frac{m}{p_t}\cos\frac{\theta_s}{2}\, M^{t}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};00} .$$

Or $$\frac{m}{p_t}\cos\frac{\theta_s}{2} = \frac{2m\sqrt{t}}{T} \times \frac{i\sqrt{\Phi}}{S\sqrt{t}} = i\sin\chi_1$$

et $$\frac{E_s \sin\frac{\theta_s}{2}}{p_t} = \frac{(s+m^2-m'^2)}{2\sqrt{s}\,T}\,\frac{2\sqrt{t}\,|t|^{1/2}\sqrt{s}}{S} = -i\,\frac{(s+m^2-m'^2)t}{S\,T} = i\cos\chi_1 .$$

De sorte que la relation de croisement est correcte dans le cas de la réaction étudiée.

Remarque : Ceci n'est pas une vérification du signe global η^s de la matrice de croisement, le signe relatif entre les spineurs $u_\lambda(p_i)$ et $v_\lambda(p_i)$ pouvant être choisi arbitrairement.

3) Vérification des contraintes cinématiques

A - Cas de la réaction $\pi\,\pi \to N\,\bar{N}$

a) Contrainte au seuil $s = 4m_N^2$

La contrainte obtenue par l'intermédiaire des amplitudes invariantes s'écrit : $F^1_{++} + 2m_N\ pk\ \cos\theta_s\ F^2_{+-} = 0$ à $s = 4m_N^2$. ($4\ pk\ \cos\theta_s = t - u$). (A.V.3)
La formule (IV.12) permet d'écrire :

$$\left.\begin{array}{l} p^{s_3+s_4}\ T^s_{\tau_3\tau_4;00} \simeq p^{s_3+s_4+\tau_3+\tau_4} \\ \text{si} \quad e^{i\theta_s} \simeq p^2 \ . \end{array}\right\} \quad \text{au voisinage de } s = 4m_N^2$$

D'où la contrainte : $p\ T^s_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};00} \simeq p^2$ c'est-à-dire $p\left(M^s_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};00} - i\ M^s_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};00}\right) \simeq$

Les fonctions "régulières" F^1_{++} et F^2_{+-} sont définies par les relations :

$$F^1_{++} = p\ M^s_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};00} \qquad \text{et} \qquad F^2_{+-} = \frac{M^s_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};00}}{k\sqrt{s}\ \sin\theta_s} \ .$$

On obtient : $\left\{\begin{array}{l} F^1_{++} - i\sqrt{s}\ pk\ \sin\theta_s\ F^2_{+-} = 0 \quad \text{à} \quad s = 4m_N^2 \\ \text{avec} \quad i\ pk\ \sin\theta_s = -\ pk\ \cos\theta_s \ . \end{array}\right.$ (A.V.4)

L'équation A.V.4 est bien identique à l'équation A.V.3 .

Remarque : Si au voisinage de $s = 4m_N^2$, la fonction $e^{i\theta_s}$ se comportait comme p^{-2} , alors la contrainte s'écrirait :

$$p\, T^{s}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2};00} \simeq p^2 \qquad \text{c'est-à-dire :}$$

$$\begin{cases} F^1_{++} + i\sqrt{s}\, pk \sin\theta_s\, F^2_{+-} = 0 \qquad \text{à} \qquad s = 4m_N^2 \\ \text{avec} \quad i\, pk \sin\theta_s = pk \cos\theta_s \end{cases} \qquad \text{(A.V.5)}$$

on voit que comme prévu, l'équation A.V.5 est identique à l'équation A.V.4 .

b) Contrainte à $s = 0$

Nous utilisons l'équation (A.IV.6) . Puisque $\text{Max}|\lambda'-\mu'| = 1$, il n'y a pas de contrainte à $s = 0$. Ce résultat est en accord avec celui obtenu par l'intermédiaire des amplitudes invariantes.

B - Cas de la réaction $N\pi \to N\pi$

a) Contraintes au seuil et au pseudo-seuil ($S = 0$)

L'équation (IV.14) nous permet d'écrire :

$$\left.\begin{array}{l} S\, T^{s}_{\tau_3 0;\tau_1 0} \simeq S^{1+\tau_1+\tau_3} \\ \text{si} \quad e^{i\theta_s} \simeq S^2 \end{array}\right\} \text{ au voisinage de } S = 0 .$$

La contrainte s'écrit alors : $S\, T^{s}_{\frac{1}{2}0;\frac{1}{2}0} \simeq S^2$ c'est-à-dire

$$S\left(M^{s}_{\frac{1}{2}0;\frac{1}{2}0} + i\, M^{s}_{\frac{1}{2}0;-\frac{1}{2}0} \right) \simeq S^2 \quad \text{si} \quad e^{i\theta_s} \simeq S^2 .$$

La "régularisation" (Tableau II_8) nous permet de définir les deux amplitudes "régulières":

$$F^1_{++} = \frac{M^{s}_{\frac{1}{2}0;\frac{1}{2}0}}{\cos\frac{\theta_s}{2}} \quad , \quad \text{et} \quad F^1_{+-} = \frac{\sqrt{s}\, M^{s}_{\frac{1}{2}0;-\frac{1}{2}0}}{\sin\frac{\theta_s}{2}} .$$

La contrainte s'écrit donc : $\sqrt{s}\, F^1_{++} - F^1_{+-} \simeq S^2$, (A.V.

puisque : $S \cos\frac{\theta_s}{2} = -\, i\, S \sin\frac{\theta_s}{2}$ à $S = 0$.

Les deux fonctions F^1_{++} et F^1_{+-} ont les expressions suivantes :

$$F^1_{++} = \hat{M}^{s}_{\frac{1}{2}0;\frac{1}{2}0} = A + B\, \frac{(s-m_3^2-m_4^2)}{2m_3}$$

et $$F^1_{+-} = \sqrt{s}\, \hat{M}^{s}_{\frac{1}{2}0;-\frac{1}{2}0} = \frac{A}{2m_3}\,(s+m_3^2-m_4^2) + \frac{B}{2}\,(s+m_4^2-m_3^2) .$$

On peut alors vérifier directement que la contrainte A.V.6 est valable à la fois au seuil et au pseudo-seuil.

Remarque : On voit qu'au seuil et au pseudo-seuil : $\hat{M}^{s}_{\frac{1}{2}0;\frac{1}{2}0} = \hat{M}^{s}_{\frac{1}{2}0;-\frac{1}{2}0}$ ce qui avait déjà été remarqué par H.F. Jones[16].

C - Réaction $\bar{N}N \to \bar{N}N$

a) Contraintes au seuil $(s = 4m_N^2)$

L'équation IV.14 permet d'écrire :

$$\left.\begin{aligned} p^2\, T^s_{\tau_3\tau_4;\tau_1\tau_2} &\simeq p^{2+\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4} \\ \text{si } e^{i\theta_s} &\simeq p^2 \quad . \end{aligned}\right\} \quad \text{au voisinage de } s = 4m_N^2$$

On peut donc écrire les quatre contraintes indépendantes suivantes :

$$p^2\, T^s_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \simeq p^4 \quad ; \quad p^2\, T^s_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \simeq p^2 \quad ; \quad p^2\, T^s_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \simeq p^2$$

et $$p^2\, T^s_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \simeq p^2$$

L'invariance par C P et T impose en effet les relations :

$$T^s_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = T^s_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \quad ; \quad T^s_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = T^s_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \quad ; \quad \text{et}$$

$$T^s_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = T^s_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \quad .$$

Définissons : $\varphi_1 = M^s_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$; $\varphi_2 = M^s_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$; $\varphi_3 = M^s_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$;

$\varphi_4 = M^s_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ et $\varphi_5 = M^s_{\frac{1}{2}\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$.

Alors les contraintes s'écrivent :

$$p^2(\varphi_1-\varphi_2) + p^2(\varphi_3+\varphi_4) + 4\,i\,p^2\varphi_5 \simeq p^4 \qquad \text{(A.V.}$$

$$p^2(\varphi_1-\varphi_2) - p^2(\varphi_3+\varphi_4) \simeq p^2 \qquad \text{(A.V.}$$

$$p^2(\varphi_1+\varphi_2) + p^2(\varphi_3-\varphi_4) \simeq p^2 \qquad \text{(A.V.}$$

$$p^2(\varphi_1+\varphi_2) - p^2(\varphi_3-\varphi_4) \simeq p^2 \qquad \text{(A.V.}$$

$$\text{si} \quad e^{i\theta_s} \simeq p^2 \ .$$

Les fonctions $p^2\,\varphi_1$; $p^2\,\varphi_2$; $\dfrac{\varphi_3}{1+z}$; $\dfrac{\varphi_4}{1-z}$ et $\dfrac{\varphi_5}{\sqrt{s}(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$ sont "régulières" (voir paragraphe A.V.1) . (On a posé $z = \cos\theta_s$ donc $1-z = -\dfrac{t}{2p^2}$ et $1+z = -\dfrac{u}{2p^2}$) .

Vérification : Gribov et Volkov[17] ont exprimé les cinq amplitudes invariantes H_i en fonction des cinq amplitudes d'hélicité indépendantes :

$$H_1 = \frac{1}{8p^4}\left[p^2(\varphi_1-\varphi_2) + p^2 z\left(\frac{\varphi_3}{1+z} - \frac{\varphi_4}{1-z}\right) - \frac{p^2 z}{m_N}(s+4m_N^2)\frac{\varphi_5}{\sqrt{s}\,\sin\theta_s}\right]$$

$$H_2 = -\frac{1}{8p^2}\left[\frac{\varphi_3}{1+z} - \frac{\varphi_4}{1-z} - \frac{4m_N}{\sqrt{s}}\frac{\varphi_5}{\sin\theta_s}\right]$$

$$H_3 = -\frac{1}{8p^2}\left[\frac{\varphi_3}{1+z} - \frac{\varphi_4}{1-z} - \frac{s}{m_N}\frac{\varphi_5}{\sqrt{s}\,\sin\theta_s}\right]$$

$$H_4 = -\frac{1}{8p^2}\left[\frac{\varphi_3}{1+z} + \frac{\varphi_4}{1-z}\right]$$

$$H_5 = -\frac{1}{2sp^2}\left[p^2(\varphi_1+\varphi_2) - p^2 z\left(\frac{\varphi_3}{1+z} - \frac{\varphi_4}{1-z}\right) + m_N^2\left(\frac{\varphi_3}{1+z} + \frac{\varphi_4}{1-z}\right) + \frac{zp^2 s\ \varphi_5}{m_N\sqrt{s}\ \sin\theta_s}\right] .$$

On remarque tout d'abord que $\frac{\varphi_3}{1+z} \pm \frac{\varphi_4}{1-z} = -2p^2\left(\frac{\varphi_3}{u} \pm \frac{\varphi_4}{t}\right) = -2p^2\left[\frac{\varphi_3+\varphi_4}{u} \mp O(p^2)\right]$

Si donc on suppose que l'amplitude H_4 est finie à $p^2 = 0$, on doit avoir :

$$p^2(\varphi_3-\varphi_4) \simeq p^2 \quad . \qquad \text{(A.V.11)}$$

D'autre part, par hypothèse, $p^2\sin\theta_s = ip^2\cos\theta_s$ à $s = 4m_N^2$.

Donc $-p^2 z\,\frac{(s+4m_N^2)\varphi_5}{m_N\sqrt{s}\ \sin\theta_s} = 4ip^2\varphi_5 + p^2\varphi_5\, O(p^4)$ si $e^{i\theta_s} \simeq p^2$ au voisinage de $s = 4m_N^2$.

L'amplitude H_1 s'écrit alors :

$$H_1 = \frac{1}{8p^4}\left[p^2(\varphi_1-\varphi_2) + p^2(\varphi_3+\varphi_4) + 4ip^2\varphi_5 + 2p^2\left(\frac{\varphi_3}{u} + \frac{\varphi_4}{t}\right)p^2\right] + \frac{ip^2\varphi_5\ O(p^4)}{8p^4} .$$

Pour éviter le pôle double de H_1 à $s = 4m_N^2$, nous devons avoir :

$$p^2(\varphi_1-\varphi_2) + p^2(\varphi_3+\varphi_4) + 4ip^2\varphi_5 + 2p^2\left(\frac{\varphi_3}{u} + \frac{\varphi_4}{t}\right) p^2 \simeq p^4 .$$

En tenant compte de l'équation A.V.11 on obtient :

$$p^2(\varphi_1-\varphi_2) + p^2(\varphi_3+\varphi_4) + 4ip^2\varphi_5 \simeq p^4 \quad \text{si} \quad e^{i\theta_s} \simeq p^2 .$$

D'autre part la contrainte :

$$p^2(\varphi_3+\varphi_4) + 2ip^2\varphi_5 \simeq p^2 \qquad \text{(A.V.13)}$$

est nécessaire pour éviter le pôle à $s = 4m_N^2$ dans l'expression de H_2 et de H_3 . Enfin pour H_5 la contrainte s'écrit :

$p^2(\varphi_1+\varphi_2) - [p^2(\varphi_3+\varphi_4) + 2ip^2\varphi_5] \simeq p^2$ ce qui, joint à A.V.13 , conduit à :

$$p^2(\varphi_1+\varphi_2) \simeq p^2 \quad . \qquad \text{(A.V.14)}$$

On vérifie facilement que les équations A.V.10, 11, 12, 13, 14 sont équivalentes aux équations A.V.7, 8, 9, 10.

b) Contrainte à $s = 0$

A partir de l'équation (A.IV.6) , on déduit qu'une contrainte existe pour $|\lambda'-\mu'| = 2$ ce qui correspond à $\lambda' = \lambda'_4 - \lambda'_2 = \pm 1$ et $\mu' = \lambda'_3 - \lambda'_1 = \mp 1$, c'est-à-dire à $\lambda'_1 = \lambda'_4 = -\frac{1}{2}$ et $\lambda'_3 = \lambda'_2 = +\frac{1}{2}$. (L'invariance par parité nous prouve que la contrainte correspondant aux valeurs opposées de λ'_i est identique).

La contrainte s'écrit alors :

$$\sum_{\{\lambda_1\}} d^{\frac{1}{2}}(-\chi_1)^{\lambda_1}{}_{-\frac{1}{2}}\, d^{\frac{1}{2}}(\chi_2)^{\lambda_2}{}_{\frac{1}{2}}\, d^{\frac{1}{2}}(\chi_3)^{\lambda_3}{}_{\frac{1}{2}}\, d^{\frac{1}{2}}(\chi_4)^{\lambda_4}{}_{-\frac{1}{2}}\, M^s_{\lambda_3\lambda_4;\lambda_1\lambda_2} \simeq s$$

au voisinage de $s = 0$.

On rappelle : $\cos\chi_1 = -\cos\chi_2 = -\cos\chi_3 = \cos\chi_4 = \cos\chi = \dfrac{-\sqrt{s}\sqrt{t}}{\sqrt{(s-4m_N^2)(t-4m_N^2)}}$

et $\sin\chi_1 = \sin\chi_2 = -\sin\chi_3 = -\sin\chi_4 = \sin\chi = \dfrac{2m_N\sqrt{4m_N^2-s-t}}{\sqrt{(s-4m_N^2)(t-4m_N^2)}}$

c'est-à-dire : $\chi_1 = \chi$; $\chi_2 = \pi - \chi$, $\chi_3 = \chi - \pi$, $\chi_4 = -\chi$.

On obtient alors $(2-\sin^2\chi)\,\varphi_1 + \sin^2\chi\,\varphi_2 - \sin^2\chi\,\varphi_3 - \sin^2\chi\,\varphi_4 + \varphi_5\; O(s) = s$,

ce qui s'écrit en remarquant que $\cos^2\chi = 0$ à $s = 0$:

$$\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 = 0 \quad \text{à} \quad s = 0 \quad . \qquad \text{(A.V.15)}$$

Vérification :

$$H_5 = -\frac{1}{2s}\left\{\varphi_1+\varphi_2 + \frac{\varphi_3}{1+z}\left(-z + \frac{m_N^2}{p^2}\right) + \frac{\varphi_4}{1-z}\left(z + \frac{m_N^2}{p^2}\right)\right\} + \text{terme fini à } s = 0 .$$

On remarque que : $\dfrac{\varphi_3}{p^2(1+z)}\;(-p^2 z + m_N^2) = -\varphi_3\left(1 + \dfrac{s}{2u}\right)$

et $\dfrac{\varphi_4}{p^2(1-z)}\;(p^2 z + m_N^2) = -\varphi_4\left(1 + \dfrac{s}{2t}\right)$.

Pour éviter le pôle à $s = 0$ on doit avoir la relation :

$$\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 = 0 \quad \text{à} \quad s = 0 \quad ,$$

qui est bien la contrainte A.V.15 .

Manuscrit reçu le 4 juillet 1967

REFERENCES

[1] - En ce qui concerne la théorie Lagrangienne des champs, on peut lire en particulier le livre de :
N.N. BOGOLIUBOV and D.V. SHIRKOV - Introduction to the theory of quantized Fields.
L'ouvrage de Silvan S. SCHWEBER -"An introduction to relativistic quantum field theory", traite les questions relatives à la théorie axiomatique des champs (pages 721 à 827).
Enfin G. CHEW dans son traité -"The analytic S Matrix",fait le point sur la théorie de la matrice S .

[2] - D.N. WILLIAMS (UCRL 11113)

[3] - H. JOOS - Fortschritte der Physik 10, 65 (1962)

[4] - K. HEPP - Helvetica Physica Acta 37, 55 (1964)
voir aussi : K. HEPP - Helvetica Physica Acta 36, 355, (1963)

[5] - J. BROS, H. EPSTEIN et V. GLASER - a) Nuovo Cimento 31, 1265, (1964)
b) Communications in Mathematical Physics 1, 240 (1965)

[6] - T.L. TRUEMAN et G.C. WICK - Annals of Physics 26, 322, (1964). Ce papier contient des références à d'autres travaux sur le croisement des amplitudes d'hélicité

[7] - YASUO HARA - Phys. Rev. 136, B 507, (1964)

[8] - LING-LIE-CHAU-WANG - Phys. Rev. 142, 1187, (1965)

[9] - A. KOTANSKI - Acta Physica Polonica 23, 699 (66) et 30, 629 (1966)

[10] - G. SZEGÖ - Orthogonal Polynomials (American Physical Society vol 23)

[11] - J.K. LUBANSKI - Physica IX 310, (1942)

[12] - E.P. WIGNER - Annals of Mathematics 40, 149 (1939)

[13] - M. JACOB et G.C. WICK - Annals of Physics 7, 404, (1959)

[14] - P. MOUSSA et R. STORA - Cours à l'Ecole Internationale d'Hercegnovi (Sept. 66). Cette rédaction contient de nombreux résultats anciens et nouveaux sur le groupe de Lorentz et leurs applications dans les réactions entre particules à spin.

[15] - S.W. MAC DOWELL - Phys. Rev. 116, 774 (1959)

[16] - H.T. JONES - Threshold conditions for helicity amplitudes Prétirage ICTP 66/4 Imperial College - Londres

[17] - V.N. GRIBOV et D.V. VOLKOV - JETP 44, 1068, (1963)

[18] - D.Z. FREEDMAN et J.H. WANG - Phys. Rev. 153, 5, 1596 (1967)

[19] - A. MARTIN - Nuovo Cimento 42, A 930 (66) et 44 A,1219, (1966)

[20] - D.H. SHARP et W.G. WIGNER - Phys. Rev. 131, 2.226 (1963) et référence 16

[21] - G. COHEN TANNOUDJI, A. MOREL, H. NAVELET - A phenomenological analysis of high energy data in π N and KN systems. A paraître dans le Nuovo Cimento.

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

"MODIFICATION DU FACTEUR DE LANDE D'UN ATOME
EN PRESENCE D'UN CHAMP DE RADIOFREQUENCE"

Vu et approuvé :
Orsay le 18 Mai 1967
Le Doyen de la Faculté des Sciences

J. BERGERARD

Vu et permis d'imprimer
Le Recteur de l'Académie de Paris

Jean ROCHE